anxa
85-B
18576

SAGGIO

SULLA STABILITÀ DELLA CUPOLA

DI S. PIETRO

IN VATICANO

SAGGIO

SULLA STABILITÀ DELLA CUPOLA

DI

S. PIETRO IN VATICANO

MEMORIA

DI ROMOLO BURRI

INGEGNERE ALLIEVO

DELLA SCUOLA TECNICA ROMANA

ROMA

DALLA TIPOGRAFIA SALVIUCCI

1849

DUPLICATO

Al Signor

NICOLA CAVALLIERI SAN-BERTOLO

PRESIDENTE DEL CONSIGLIO D'ARTE PEI LAVORI PUBBLICI D'ACQUE STRADE E FABBRICHE DELLO STATO PONTIFICIO; MEMBRO DEL COLLEGIO FILOSOFICO, E PROFESSORE D'ARCHITETTURA STATICA E IDRAULICA NELL'UNIVERSITA DI ROMA; SOCIO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA ROMANA DELLE SCIENZE DENOMINATA DEI LINCEI, CORRISPONDENTE DI QUELLE DI TORINO, DI BOLOGNA, EC. EC.

Un lavoro scientifico fatto da un' allievo della scuola degl' ingegneri di Roma, sarà sempre debitore alle classiche vostre opere, e alle cure zelantissime che Voi largamente spendete a vantaggio della scienza e dell' arte, ed a vantaggio de' giovani guidati all' esercizio dell' ingegnere civile. Ma più di qualunque altro sarà debitore a Voi, o illustre Professore, questo mio lavoro che vi degnate concedermi di fregiarlo del vostro chiarissimo nome, con accettarne l' offerta.

Cotest' onore, che il mio nome sia unito al vostro, è già un gran premio di questa mia fatica sopra un tema così difficile, e di tanta alta importanza, e che è stato per lungo tempo soggetto di disputa a molti

dottissimi filosofi per le energiche cure di tanti Pontefici: cosicchè un tanto tema non meriterebbe, stante la povertà del mio ingegno, d'esser accolto da Voi, se non fosse la vostra esimia bontà. Assicuratevi però che un sentimento affettuosissimo di riconoscenza supplisce al tenue omaggio che io vi tributo, per l'amorevolezza con cui dirigeste i primi miei passi nella difficile carriera da Voi con tanto splendore, ed applauso universale percorsa.

Gradite signor Professore ancora l'alta stima del

Vostro Affezionatissimo Servitore

ROMOLO BURRI.

PROEMIO

Nel maggior Tempio della Cristianità, ove riposa il cenere di S. Pietro e di S. Paolo, ove è l'augusta Sedia de' Pontefici, conveniva che trionfasse il genio del maggior fra tutti gli artisti. E la Cupola Vaticana che s'erge gigante in mezzo al magnifico Tempio e l'incorona, spettacolo dell'ammirazione de' popoli, com'è il più sublime testimonio dell'umano ingegno, è pure il più grandioso monumento della gloria di Michelangelo, ed insieme della gloria dei Pontefici. Sorpreso e mosso dalla sublimità ed importanza della cosa, e sdegnato che, o per effetto di timore, o per apparenze di qualche lesione si levassero in passato forti dubii sulla perennità e stabilità di essa, e tutt'ora si rinnovano e acquistino seguaci, posi mano a dettare questo scritto, coll'intendimento di smentire le dubbiezze e far conoscere il vero stato

di sicurezza di tanto miracolo di mole. Esposta la storia, le vicende, la struttura, e l'indole di essa, e mostrato lo stato della sua stabilità col sussidio del calcolo, accennerò i provvedimenti che possono d'avvantaggio assicurarla. Certo si è che l'impresa non è per gli omeri miei, e pur troppo ad arduo volo si affida il mio povero ingegno e ne trema. L'unico raggio di speranza che mi conforta, è che mi sia fatta indulgenza pel buon volere, che nelle grandi cose è molto!

PARTE PRIMA

CUPOLE, LORO STORIA E GEOMETRICA GENERAZIONE. CUPOLA VATICANA COME CONCEPITA DA MICHELANGELO. EREZIONE E MATERIALE STRUTTURA DI ESSA. ACCESSORII. DIMENSIONI. NATURA DELLA CURVA MERIDIANA D'INTRADOSSO.

1. Vitruvio chiama colla voce Cupola (che suona *cavità*, *profondità*) la Volta di un edificio regolare che abbia per intradosso una superficie le cui sezioni orizzontali sieno figure simili col centro sull' asse verticale.

2. Le Cupole ponno essere a base poligona o curvilinea. Presso gli antichi servivano a coprire i loro Templi, e una Cupola sorgeva su quello di Appolline in Delfo, secondo Vitruvio. Ora delle antiche non restano che la celebratissima del Panteon, quella di Santa Sofia in Costantinopoli, e quella di San Vitale in Ravenna.

3. I moderni Architetti avendo nelle Chiese del Cristianesimo preferita la forma a Croce alla Basilicale, ebbero occasione di coprire con Cupola la parte del Tempio che nasce per l' intersezione de' due bracci della Croce, che come la più nobile e centrale del Tempio gli imprime un carattere maestoso ed imponente. E perchè le due navate che s' intersecano hanno comunemente la medesima altezza, le Cupole sogliono insistere quasi

sempre sopra base quadrata, e le loro superficie sogliono essere di rivoluzione.

4. Per conoscere geometricamente la genesi delle moderne Cupole s' immagini sugli angoli d'un area quadrata poggiare quattro pilastri, che in questo caso prendono nome di *Piloni*, essendo destinati a sorreggere la mole della Cupola. Col centro nel punto ove le diagonali del quadrato proposto si segano, si descriva un circolo di guisa che il quadrato gli sia circoscritto. Questo circolo s' intenda proiezione orizzontale d' una superficie emisferica. Ciò posto se si taglia questa superficie con quattro piani verticali insistenti sui lati del quadrato e con un quinto orizzontale tangente alla sommità di tutte le quattro sezioni circolari accennate, questo piano interseca la sfera in una periferia uguale alla sua proiezione che è il circolo iscritto al quadrato. Togliendo alla superficie sferica le cinque porzioni segate restano quattro triangoli sferici simili ed uguali tra loro che costituiscono la faccia interna dell' edificio, e diconsi *Peducci*, o *Pennacchi* della volta. L' asse della Cupola è la perpendicolare indefinita innalzata nel punto d' intersezione delle diagonali del quadrato. Figuriamoci che la periferia obbiettiva che si projetta inscritta al quadrato si muova in guisa da percorrere col suo centro la detta perpendicolare, e col suo piano da mantenersi costantemente normale all' asse della Cupola. La superficie che si genera è cilindrica e costituisce il Tamburo sul quale insiste la Cupola, che viene generata dalla medesima periferia che si muove in maniera *che il suo centro* percorra l'asse, ed il suo piano rimanga perennemente normale all' asse stesso con un raggio che va modificandosi uguale alla distanza che passa fra il punto ove il piano del circolo taglia l'asse a quello ove tal piano taglia una curva qualunque, concava all'asse della Cupola, che n'è la linea meridiana.

5. Fra le moderne grandiose Cupole primeggia quella di S. Maria del Fiore in Firenze. Per la morte dell' Architetto Arnolfo

di Lapo era rimasta questa Chiesa scoperta nella sua parte più nobile, poichè da lui si doveva compier l'opera ed ergere la Cupola. Altri Architetti fiorentini ne fecero disegni e modelli, ma tali che non ne permettevano l'esecuzione per l'ingente spesa delle armature.

6. Volgeva il 1407 e Filippo Brunelleschi studiava nell'eterna Roma che fu sempre il santuario dell' arti, ed il teatro dell' Architettura. Chiamato a Firenze per ordine di chi presiedeva la fabbrica, diè mano ai Disegni per la nuova Cupola, ma perchè il suo sistema era della massima economia e non consono ai proposti fu rigettato qual utopìa.

7. Allora la Repubblica Fiorentina invitò d'ogni dove Architetti a voler proporre i loro concetti rapporto all' erezione della Cupola per la nuova Chiesa. E nel 1420 trassero in Firenze ingegneri francesi, tedeschi, inglesi, ed italiani. Si proposero disegni e modelli senza numero, ne' quali però non si ebbe che a conoscere e lamentare la meschinità de' loro ingegni per le ridicole e dispendiose armature.

8. Scoraggita la Repubblica che niuno soddisfacesse al bisogno ed al suo desiderio, non le rimaneva che far prova del sistema del Brunelleschi. A lui comandò d' innalzare la gran Cupola, e Brunelleschi innalzolla con tanta gloria che il suo nome scritto dalla fama su tanto monumento non morrà.

9. Questa fu lume ed esempio perchè ne sorgessero altre. Baccio Pintelli nel 1484 alzava la Cupola della Chiesa di S. Agostino in Roma, la più antica che vi esista. E per comandamento di Papa Sisto IV ergeva quella della Chiesa di S. Maria della Pace, e l'altra di S. Maria del Popolo; e poco dopo cioè nel 1488 Carlo Maderno fabbricava quella in S. Giovanni de' Fiorentini; ed Antonio Sangallo nel 1507 architettava quella di S. Maria di Loreto de' Fornari, la quale è doppia, internamente ottagona ed all' esterno di rivoluzione.

10. Regnando Papa Paolo III il Sangallo presiedeva i lavori della Fabbrica di S. Pietro in Vaticano. Con bellissimi concetti ei ne rinnovò il disegno, e rinforzò i Piloni che aveano a sorreggere la Cupola, quando colpito da morte ne rimase l'opera interrotta. Soggiornava allora il Buonaroti a Firenze sua patria, e di sè avea levato grandissimo grido sugli artisti contemporanei. Paolo III l'invita a succedere nell'onorevole incarico al Sangallo. Da prima egli modestamente se ne rifiuta, ma il Papa che solo lo conosce degno di adempiere a tanto ufficio, glie ne fa comando, e Michelangelo prende la soprintendenza d'Architetto della Fabbrica di S. Pietro.

11. Pose allora ogni studio per satisfare ai desiderii del Pontefice ed al voto comune. La vastissima sua mente ideò la sterminata e maravigliosa Cupola Vaticana della quale Foscolo ebbe a cantare (*)

. . . . . Colui che nuovo Olimpo
Alzò in Roma ai celesti . . . . . .

La Cupola del Panteon e di Santa Maria del Fiore gli dettero lume, ma egli corresse i difetti dell'una e dell'altra, e ne creò una originale ed umanamente perfetta. Quella del Panteon appaga l'occhio internamente, ma non di fuori rispetto alla grande estensione che bassa la rende per mancanza di simmedria. Quella di Santa Maria del Fiore non può riprendersi di questo difetto, perchè è divisa in due falde una concorrente al di dentro, l'altra al di fuori, ma la concorrenza dell'esterna pecca d'acutezza.

12. Michelangelo fortificò di nuovo i quattro Piloni, e alacramente finchè gli bastò la vita pel volgere di 17 anni presie-

(*) Carme sui Sepolcri.

dette la Fabbrica di S. Pietro. Non mancò l' invidia di movergli contro guerra, onde fu le più volte sul ripatriare, ma è pur vero che l' invidia col suo soffio non isfronda gli allori, ma li feconda.

13. Alla morte di lui già il Tamburo erasi costrutto, rimaneva ad innalzarsi la Cupola. Scorsero 24 anni e nulla si operò. Si attendeva il potentissimo braccio di Sisto V che l' innalzasse. Salito quest' uomo portentoso al Ponteficato nel 1583 ordinò subito che fossero eseguite le idee del Buonaroti, e Giacomo della Porta, ed il cav. Domenico Fontana celebri architetti furono meritamente prescelti alla grand' opera, che la condussero fino all' occhio del Cupolino. Mancato il Pontefice Sisto V restò per molti anni in tale stato, e senza i piombi all' esterno che dall' intemperie la difendessero. Fu il Papa Clemente VIII che la vide compiuta.

14. La materiale struttura del Tamburo fu diretta da Michelangelo, che con particolare acutezza d'arte ne architettò la tessitura. La parte interna è arcuata analogamente al muro di cinta del Panteon, e all' occhio dell' osservatore chiaramente apparisce la volta di sopra di questi archi. La parte esterna è formata con crosta di pietra Tiburtina, e l'interna è un misto di costruzione in pietre artefatte ed in pietrame. La struttura della Cupola poi è un' amalgama di pietre naturali e laterizi promiscuamente uniti con soverchio cemento. Vi lavorarono 600 operaii notte e giorno, ed in 22 mesi la vasta mole fu compiuta. A meglio garantire la stabilità fu armata di due catene, o cerchi di ferro, uno che abbraccia la Cupola interna al principio del suo nascimento, e l'altro interiormente posto nel mezzo del muro, e che le abbraccia entrambe.

15. Pare che Michelangelo e gli architetti che gli successero, quanto dotti nel concepire, altrettanto erano negletti nel costruire. Non si potea scegliere peggior maniera di edificare, es-

sendo deturpate le più sane regole dell' arte e della stereotomia; ed un tanto monumento non esigeva forse la massima diligenza, e nell' apparecchio e nell' impiego de' materiali? L' inferiore cerchio poi posto di mezzo al muro legando la metà interna e non l' esterna del medesimo non può essere stato che di pregiudizio negli assettamenti della Cupola, o in qualche altro movimento ingenerato da causa esterna perchè non presentava quella uguale resistenza che si richiedeva.

16. La Fig. 1.ª (Tav. 1.ª) rappresenta lo spaccato della Cupola; il muro X, X attiguo del Tamburo forma il suo primo nascimento, s' innalza arcuatamente, e s' ingrossa a mano a mano sino che giunto ad una certa altezza si divide in tre parti, una di mezzo A che serve per l'ambulazione, e due laterali che costituiscono la Cupola interna ed esterna, le quali dal nascere fino al loro termine divergono. Spiccano dal paralello A, A sedici muri che le uniscono e s' innalzano in arcuazioni sino al piede della Lanterna convergendo all'asse della Cupola.

17. Tutta la Cupola posa sopra quattro robusti Piloni, e su gli arconi delle quattro gran navate; la parte più nobile del Tamburo posa su due sovrapposti zoccoloni circolari BB, CC, su i quali esso sorge composto di 16 pilastri, ciascuno fiancheggiato da due colonne D, D, atte a resistere alla spinta orizzontale che per la Cupola si esercita alla sommità. Inferiormente s' è aperta una Porta E, E per comodo di accedere all' interno, e tra un contraforte e l'altro v' è praticato un finestrone. S' incammina per un ripiano formato nella total grossezza del Tamburo che mette all' ingresso delle scale che sono più verso il centro concorrenti alla sua periferia, le quali a gradini continuano sino al piano del secondo zoccolone ove poggiano i contraforti del Tamburo. Dentro vi si gira per mezzo di scalette a spira situate perpendicolarmente ed insistenti sopra un Pilone. Queste mettono

capo alla cima del Tamburo ed all'altre situate nello spicco dello zoccolo che si ergono spiralmente sino all'ambulazione nel nascimento delle due Cupole.

18. V'ha altre scale tracciate secondo le curve meridiane, che essendo incommode e pericolose furono rimpiazzate con savio intendimento dal Valadier da altre a *zic-zac* che nulla lasciano a desiderare quanto alla sicurezza ed al comodo. Ascendono altre scale sino alla Lanterna sul dorso di otto falde della Cupola interna, e da prima sono a perpendicolo poi prosieguono più agevolmente sino al Cupolino. Giunti al piantato di questo che può dirsi un'altra Cupola sovrapposta, con altre scale verticali ed a chiocciola si sale al piano della cuspide, poi alla gran Palla che incorona la Lanterna. Sedici contraforti sostengono il Tamburo della Lanterna che corrispondono nel senso verticale a quelli del Tamburo della Cupola: tra i rispettivi sedici vani si aprono altrettante finestre, e sopra ciascun contraforte sorge un candeliere. Così oltre la bella ed idonea decorazione si avvalora la resistenza alla spinta orizzontale che la cuspide esercita superiormente.

19. Il diametro della base che insiste sopra il Tamburo è di metri 42,37; il diametro dell'occhio della Lanterna m. 7,13 quasi la sesta parte di quello della Cupola. L'altezza IIII' (Tav. 1.ª Fig. 2.ª) è m. 24,75. L'altezza del primo zoccolone circolare BB (Tav. 1.ª Fig. 1.ª) m. 4,52; quella del secondo CC m. 3,57. L'altezza del Tamburo DD m. 14,85. L'altezza del piedestallo od ordine attico XX donde spicca la Cupola m. 5,57; l'altezza della curva meridiana d'estradosso m. 26,31; l'altezza dal basamento del Cupolino all'apice della Croce m. 25,69; l'altezza dal piede del masso ottagono OO del primo spicco del Tamburo sopra gli arconi fino alla punta della Croce m. 86,45; l'altezza poi totale della Croce sul livello del mare

è m. 160 (*). La grossezza della Cupola alla chiave è di m. 4,24; ad una distanza di m. 6,46 da questo punto è di m. 3,90; alla distanza di m. 12,92 dal medesimo punto m. 3,60; alla distanza di m. 19,38 dallo stesso punto corrisponde una grossezza di m. 3,40; al suo nascimento, ossia l'imposta sopra il Tamburo m. 3,12. La grossezza de' due sovrapposti zoccoloni è di m. 8,49.

20. Quanto alla natura della curva GG′ (Tav. 1.ª Fig. 2.ª) che ruotando attorno l'asse HH′ genera la superficie d'intradosso, nulla può raccogliersi dagli scrittori di questo superbo Monumento, da restarne geometricamente persuasi. E siccome a noi giova il conoscere e l'indole, e le affezioni di questa curva diamo mano ad investicarla.

21. Conducasi dal punto A′ la perpendicolare A′a, il punto a ove taglia l'orizzontale aa′ guidata dal principio della curvatura d'estradosso si ammetta gratuitamente che sia centro d'un circolo, e la curva meridiana GG′ ne sia un'arco. Il Poleni (**) divide questa curva GG′ in sedici parti uguali in modo che sia

$$AB = BC = CD = \ldots\ldots = RS$$

$$AG' = GS = \frac{AB}{2}.$$

Poscia conduce le ordinate

$$G'H' \;,\; A1 \;,\; B2 \;,\; C3 \ldots\ldots GH$$

normali all'asse HH′ e ne dà le effettive misure che tradotte in metri le riportiamo nell'annessa Tabella.

(*) Questa misura si rinvenne col Teodolite dal sig. Ingegnere Pio Branchini nella primavera dell'anno 1846. Direttore tanto abile quanto amorevolissimo negli esercizii di campagna che si praticano per gli alunni della scuola tecnica; misurò ne' prati di Castello una base lunga m. 220, e col Teodolite, e col calcolo rilevò l'altezza della punta della Croce sopra il punto di stazione, e riferendo questo alla soglia di Porta del Popolo la cui posizione sul livello del mare era nota, potè conoscere immediatamente l'altezza di m. 160 della punta della Cupola sul livello del mare.

(**) Memorie storiche della Cupola del Tempio Vaticano.

		Metri		Metri
G′ H′	201	21,25	G′ O	17,69
A 1	200	21,14	A 1′	17,59
B 2	198	20,93	B 2′	17,37
C 3	195	20,61	C 3′	17,05
D 4	191	20,19	D 4′	16,63
E 5	184	19,40	E 5′	15,84
F 6	177	18,70	F 6′	15,14
G 7	168	17,76	G 7′	14,20
H 8	159	16,80	H 8′	13,24
K 9	148	15,64	K 9′	12,08
L 10	135	14,27	L 10′	10,71
M 11	122	12,94	M 11′	9,38
N 12	108	11,41	N 12′	7,85
P 13	92	9,72	P 13′	6,16
Q 14	76	8,03	Q 14′	4,47
R 15	60	6,32	R 15′	2,76
S 16	41	4,33	S 16′	0,77
G H	»	3,56	»	»

Le G′ O , A 1′ , B 2′ , C 3′ . . . . . si ottengono dall' abbassare da G la normale GO. Se l' ipotesi che l'arco GG′ sia circolare è vera, uopo è che fra queste ascisse ed ordinate passi quella relazione che rappresenta l'equazione del circolo.

22. Sia in G l'origine delle coordinate, e GO l'asse delle x; l'equazione della curva GG′ sarà per l' ipotesi

$$x^2 + y^2 - 2\,D\,x + 2\,\Delta\,y = 0$$

essendo $D = A'\,a \qquad \Delta = 7{,}13$

Per determinare la quantità D pongasi nell' equazione

$$x = 25{,}86 \qquad y = 17{,}69$$

onde emerge $D = 24{,}107$.

23. Ciò premesso si determini l'arco GG′ della linea meridiana; a tale oggetto si risolva rapporto ad x l'assunta equazione, e risulta

$$x = D \pm \sqrt{D^2 - 2\,\Delta\,y - y^2}\,.$$

Differenziando, $d\,x = -\dfrac{\Delta\, d\,y + y\, d\,y}{\sqrt{D^2 - 2\,\Delta\, y - y^2}}$.

L'equazione della rettificazione delle linee è

$$d\,s = d\,x \sqrt{1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}}$$

sostituendo diventa

$$d\,s^2 = d\,y^2 + \frac{(\Delta\, d\,y + y\, d\,y)^2}{D^2 - 2\,\Delta\, y - y^2}.$$

Riducendola opportunamente emana

$$d\,s = \frac{d\,y \sqrt{\Delta^2 + D^2}}{\sqrt{D^2 - 2\,\Delta\, y - y^2}}.$$

Per procedere all'integrazione si faccia

$$y = z - \Delta$$

e quindi si otterrà $d\,s = \dfrac{d\,z}{\sqrt{1 - \dfrac{z^2}{\Delta^2 + D^2}}}$

finalmente integrando e ritornando in luogo di z la y, si ha

$$s = \text{arc. sen.}\ \frac{y + \Delta}{\sqrt{\Delta^2 + D^2}} + \text{Cost.}$$

Quando $s = o$, è $y = o$

però l'integrale completo è

$$s = \text{arc. sen.}\ \frac{y + \Delta}{\sqrt{\Delta^2 + D^2}} - \text{arc. sen.}\ \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + D^2}}$$

sostituendo a D, Δ i valori numerici si ottiene

$$s = \text{arc. sen. } 1{,}000 - \text{arc. sen. } 0{,}284$$

finalmente $s = 75^0, 50'$

però gli archi

$$AB = BC = CD = \ldots\ldots RS = 4^0\,,\,35'\,,\,37''.$$

24. Volendosi l'ordinata y che corrisponde all'arco GM avremo

$$25^0\,,\,16'\,,\,38'' = \text{arc. sen.}\ \frac{y + 7{,}13}{24\,,\,82} - 16^0\,,\,30'$$

$$\text{sen. } 41^0\,,\,46'\,,\,38'' = \frac{y + 7{,}13}{24\,,\,82}$$

finalmente $y = 9{,}41.$

Ma secondo il Poleni $y = 9{,}38.$

La differenza di tre centimetri è insensibilissima. Nella stessa maniera collimano le altre ordinate dal medesimo misurate, onde si può francamente assicurare che la curva dalla cui rotazione viene generata la superficie d'intradosso della Cupola Vaticana è un arco di circolo di $73^0\,,\,30'$.

25. Questa soluzione manca del rigor geometrico e giova avvertirlo. Quando una linea è dell'ordine n richiede

$$n\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

punti per essere determinata. Se fosse

$$n = 2$$

risulterebbe $n\left(\frac{n+3}{2}\right) = 5$

e tanti sono i punti necessarii per determinare le linee del secondo ordine. Ma siccome per noi è

$$n\left(\frac{n+3}{2}\right) = 18$$

la linea che passar può per i punti

G , S , R . . . . . B , A , G′

non è limitata ad esser di secondo grado. Avvertasi però che dipende dal nostro arbitrio il numero dei punti

G , S , R . . . . . B , A , G′

e siccome siamo partiti dal supposto che il luogo geometrico sia un' arco circolare, ed abbiamo trovato conferma per parte del calcolo, ci siamo indotti a concludere giustamente essere un' arco di circolo la curva che passa per quei punti.

PARTE SECONDA

DUBBII SULLA STABILITA' DELLA CUPOLA VATICANA. LESIONI IN ESSA MANIFESTATESI AI TEMPI DI PAPA BENEDETTO XIV. OSSERVAZIONI FATTE IN QUESTA OCCASIONE DA VALENTI MATEMATICI. LORO OPINIONI E RIMEDII PROPOSTI. ESAME CRITICO DE' MEDESIMI.

26. Le dicerie sulle lesioni, e distacchi manifestatisi nella Cupola Vaticana segnano diversi periodi de' quali giova toccare separatamente. A detto del Contivi fin da principio il Bramante fabbricò i muri di non buona materia, e di non buona struttura; ed infatti ci racconta il Serlio che dopo la di lui morte a consiglio di Fra-Giocondo, di Raffaello, e di Giuliano, si rifecero i Piloni per le gravi lesioni apertesi negli arconi senza che sul loro dorso gravitasse alcun peso estraneo.

27. Il quì detto, le varie mutazioni d'Architetti, le sofferte vessazioni di Michelangelo ci parlano chiaramente come fin d'allora pullulavano vaghe opinioni e controversie sulla stabilità dell' edificio, e s'arroge che già quegli Architetti per quattro volte furono costretti a porre ogni cura a fortificare solidamente i quattro Piloni che avevano a sorreggere l' immensa mole.

28. Il Baldinucci (*) ci narra che l'anno 1680 per alcune

(*) Biografia del Cav. Lorenzo Bernini.

lesioni osservatesi nella Cupola e suo Tamburo, insorse un nembo di popolari tempeste contro il Bernini che lo accagionarono de' lavori fatti nei Piloni. Queste voci furono sanzionate da chi ebbe a esaminarli, ed il danno specialmente si ripeteva dalle quattro scale a chiocciola praticate nell' interno de' Piloni. Ed è vergogna che tanta falsa opinione circoli tutto dì sul labbro non del volgo, lo perchè non sà, ma sul labbro di persone che pur si vantano di sapere. È vero che il Bernini alleggerì il peso dei Piloni coll' aprire le dette scale, ma questa sottrazione di peso che è mai in confronto dell' immensa loro massa? Si opponga pure al Bernini avere diminuita la resistenza allo schiacciamento; ma questa è esuberante d'assai. Infatti l'area d'uno de' quattro Piloni è di metri quadrati 245,56, e col calcolo mediante la formola (*)

$$X = \frac{P}{5000\,R - a\,G}$$

ove

$$R = 34,40$$

resistenza allo schiacciamento della malta,

$$a = 46,83$$

altezza del Pilone,

$$G = 1522$$

gravità specifica del muro,

$$P = 14052334,56$$

peso estraneo gravitante: si trova

$$X = 139,51$$

metri quadrati: dunque quanto alla resistenza allo schiacciamento la stabilità è d'avvantaggio assicurata.

29. Per cessare tante voci Papa Innocenzo XI fece comandamento a Mattia De-Rossi di visitare lo stato della Cupola. Il

(*) Cavallieri Archit. St. e Id. § 628.

De-Rossi fece di pubblica ragione il suo sentimento, approvato pure da Carlo Fontana e Gio. Antonio De-Rossi, i quali convenivano che le lesioni ed i distacchi osservati originavano dallo assettamento della Fabbrica, ed ebbe così una solenne mentita l'Architetto che solo per seminare controversie aveva prima di loro esaminato quel lavoro.

30. Elettosi Papa Benedetto XIV nel 1740, anche la Cupola Vaticana fu subbietto delle zelantissime sue cure. Ne pendeva sempre la questione sulla solidità e durata, ed in allora clamorosamente perchè vociferavansi nuovi distacchi, onde il Pontefice mosso più da saggia provvidenza che da reali disordini, con un Breve segnato il dì 17 Ottobre dello stesso anno di sua ascensione al soglio Pontificale, creava appositamente per l'esame della Cupola una Deputazione negli Eminentissimi Cardinali Giacomo Amatori e Carlo Rezzonico, con Monsignor Caracciolo per Segretario.

31. A mano a mano col progredire del tempo le voci si moltiplicavano. Chi voleva che i disordini fossero gravissimi, chi più saviamente li risguardava tenui. Ma la questione prendeva corpo, non più accennava solamente i danni ma ne esponeva i rimedii da impiegarsi. E non è maraviglia poichè gli uomini le molte volte si fingono mali ove non sono, e pretendono rimuoverli senza che sussistano. Intanto la fermentazione delle voci erasi fatta imponente.

32. Il Pontefice non poteva ascoltare con indifferenza queste cose, e geloso della conservazione di tanta mole con rescritto segnato il 26 Settembre 1742 permetteva ampla facoltà a Monsignor Economo d'invitare idonei personaggi all'esame dello stato della Cupola, ed il giorno 3 Ottobre del medesimo anno Domenico Santini e gli Architetti Cav. Domenico Gregorini, Pietro Ostini, Cav. Ferdinando Fuga, Nicola Salvi, e Luigi Van-

vitelli visitarono con ogni accuratezza i quattro Piloni, e non fu scoperto segno alcuno di detrimento, come consta dall'autentico rapporto dai medesimi sottoscritto.

33. Ma il Tamburo, la Cupola, ed il Cupolino mostravano distaccamenti non piccoli. Ecco quanto ci riferisce l'Abbate Saverio Brunetti (*). Lesionati orizzontalmente il Cupolino non che i contrafforti: le colonne fuor di perpendicolo, screpolata la scaletta che mette alla Cuspide della Lanterna, e la Lanterna stessa. Le muraglie de' costoloni con distacchi specialmente nella concorrenza delle due Cupole in direzione presso che orizzontale. Lesionati i due corpi delle Cupole in tutta la loro estensione verticale, alcune di queste fessure si osservano ad occhio nudo stando nel Tempio presso la Confessione, alcune radono i costoloni, altre scendono pe' corpi degli spicchi. Crepate le soglie degl'architravi, le cornici delle finestre del Tamburo. Offesi i contrafforti del Tamburo in direzione obliqua, strapiombate le colonne di questi contrafforti qual più, qual meno. Aperta intorno allo zoccolo che forma base ai contrafforti una fessura circolare larghissima che rade la base delle colonne. Lesionata la muraglia opposta con crepature oblique che dai Piloni si avanzano sugli archi. Spaccata la volta del corridore per mezzo, con una crepatura che gira attorno e passa tutta la grossezza della volta, apparendo nel mattonato sotto gli archetti de' contrafforti e per tutto attorno il ripiano pel quale si percorre il Tamburo.

34. Stava grandemente a cuore del Pontefice Benedetto XIV la conservazione della Cupola, e dava ordine a Monsignor Olivieri di ricercarne il sentimento degli Statici intorno la stabilità, e nominatamente de' tre Matematici d'insigne dottrina P. Ruggero Boscovik Gesuita, P. Tommaso Le-Leur dell'Ordine de' Mi-

(*) Discorso su i difetti e rimedii de' danni della Cupola Vaticana.

nimi, ed il P. Francesco Jacquer, che non mancarono nè a sè stessi, nè al voto del Pontefice.

35. Ma essendo la cosa di tanto alto momento non volle la Santità di Papa Benedetto XIV acquietarsi al parere di questi, ma volle che s'interpellasse pure l'opinione del chiarissimo Marchese Poleni Professore di Fisica sperimentale all'Università di Padova, e quindi con lettera in forma di Breve gli si palesava questo desiderio, ed era chiesto del suo sentimento.

36. Il ricordare tutti gli scritti e tutte le opinioni che uscirono in allora è troppo ardua ed inutile impresa. Fra 24 diversi pareri disputavasi lo stato di stabilità della Cupola, e chi proponeva un rimedio, chi un'altro, ed in tanta voga di sistemi regnava la confusione, e non poteva incontrare altrimente, una sola essendo la verità, e questa ascosa ne' segreti della più alta geometria, e perchè dell'equilibrio delle Cupole a quei tempi pochissimo si conosceva. Laonde controversa la questione è rimasta fino a' nostri giorni. Noi accenneremo solo i bellissimi lavori del Poleni, e de' tre lodati Matematici per dare una più precisa idea della questione in campo.

37. Ci bisogna premettere alcune nozioni meccaniche che ci aprono la strada per parlare de' lavori del Marchese Poleni. La curva d'equilibrio d'una volta composta di latercoli rigidi pesanti o carichi, è una catenaria la cui equazione differenziale è

$$\pi \, d \, y = A \, d \, x$$

ove π è il peso dell'arco, ed A la tenzione orizzontale in ogni singolo punto della curva ed è costante. Quando π è proporzionale all'arco il peso della catena è uniforme, e la curva appellasi catenaria omogenea, altrimenti conserva il nome semplicemente di catenaria, e la sua curvezza dipende dal rapporto di π all'arco. Agevole è la descrizione meccanica della catenaria omogenea e dell'altre, le quante volte sia nota la legge con che il

peso è distribuito per la lunghezza dell' arco. Per l' omogenea basta segnare in un piano verticale l'orma d'una catenella uniforme fissa ai suoi estremi. Per le altre catenarie si opera della guisa stessa, e quando il peso non sia scompartito uniformemente i pesi degli anelli della catena saranno in giusta proporzione col peso dell' arco.

38. Il Marchese Poleni avendo in vista la teorica degli archi, si pensa che la statica di essi naturalmente si estenda a quella delle Cupole. E paragonando archi e Cupole ad un tempo vi vede fra loro una certa analogia donde nasce una congrua relazione tra la loro struttura, potendo le Cupole dagli archi venir generate.

39. Con queste massime egli si pose a meditare sulla gran Cupola Vaticana. Ne fece una sezione con un piano esteso per l'asse; divise a mezzo i lati verticali dell'occhio del Cupolino a′ b (Tav. 1.ª Fig. 3.ª) intercetti tra le curve d' intradosso ed estradosso, da questi punti abbassò due perpendicolari e le produsse fino a che le parti sottoposte al diametro fossero uguali alle intercette dai due punti di divisione nominati e dall' asse. Partì a metà le grossezze della volta al suo nascimento i, e collocò una catenella appesa nei suoi estremi ai due ultimi punti di divisione, in guisa che toccasse l'estremità delle due suddette perpendicolari. Capovolse quindi al di sopra la descritta curva che prese la posizione i, a, c, z, passando come incontrar doveva pe' due punti di divisione dell' occhio del Cupolino. Questa catenaria nell' assunto che i pezzi di traverso tagliati siano ugualmente grossi rappresenta la curva dei centri componenti la volta.

40. A mettere in miglior lume le sue ricerche il Poleni pone che la curva i m m′ z segni la curva che passa per tutti i centri di gravità de' cunei, la quale dividerà quasi ugualmente la metà della sezione. E pensa che con essa avrebbe a coincidere

la catenaria i, a, e, z, se la figura della Cupola fosse la conveniente ed esatta. Ma siccome questa catenaria si appressa all' interno contorno ed anzi nel mezzo sporge alquanto fuori, le parti della volta (a sua veduta) comprese tra la base ed il Cupolino sembrano stendersi al di fuori più del dovere, e tendono quindi a sfiancare.

41. Immagina poi la Cupola divisa da 25 piani verticali condotti per l'asse in guisa che essa resta divisa in 50 spicchi. Considera uno di questi, lo divide in sedici parti uguali di cui determina il peso non tralasciando di computarne anche quella porzione di peso del Cupolino che gravita sopra ogni spicchio. Fa costruire una catena il di cui peso sia in ogni punto nello stesso rapporto del peso spartito da punto a punto lungo lo spicchio, e descrive così la catenaria i, e, m″, z, che più della prima si accosta alla linea de' centri.

42. Questa è la curva che dovrebbe collimare con quella de' centri. Ma perchè non vi collima conclude il Poleni che i cunei sieno un poco all'infuori tendenti a sfiancare, e che non sieno nel congruo stato d'equilibrio, e per conseguenza la figura della volta non possa dirsi perfetta. Ma come osserva il dotto Meccanico, questa pecca d' imperfezione è poca cosa, poichè se i centri de' cunei non cadano precisamente nella catenaria poco si allontanano, e niuna parte della catenaria cade fuori de' contorni della volta, come accadeva dell' omogenea. Dunque può conchiudersi non essere la figura della Cupola in difetto rapporto all' equilibrio.

43. Ma basti de' lavori del Poleni. Il Boscovik, il Le-Leur, ed il Jacquer c' invitano ad esaminare i loro. Essi di perfetto accordo opinano che gli accennati guasti non provengono da indebolimento ne' Piloni per le scavature praticatevi dal Bernini, nè sieno effetto dell' assettamento di tutta la mole perchè questo avvenir suole nel giro di poco tempo, laddove secondo il Baldi-

nucci i danni si mostrarono sino dal 1631 e proseguirono; nè dipendono da cedimento dei fondamenti de' Piloni, poichè ciò essendo, o alcuno di essi si sarebbe avvallato più degli altri, o sarebbe sporto in fuori, del che non avvene segno, e le aperture verso il fondo della base del Tamburo sarebbero più grandi. Nè si argomenti per avventura il patimento de' Piloni dalle maggiori spaccature esistenti sopra di essi. Ciò deriva che il Tamburo ove corrispondono gli arconi appoggia sul vivo de' medesimi, ed ha il rinfianco delle grandi volte delle quattro navate che non gli permettono sporgere in fuori, ma dove corrispondono i Piloni poggia in falso sulle volticelle triangolari che si frappongono tra un' arcone e l'altro, e manca ogni rinfianco alla base.

44. Così la discorrono i tre lodati Matematici e si pensano potere asseverare che la Cupola abbia patito in sè stessa, e vogliono che il peso del Cupolino premendo le due Cupole ed i costoloni, accresciuto del peso delle Cupole stesse, abbia spinto in fuori il Tamburo come loro sostegno comune. Si consideri il costolone N, I, H, M, (Tav. 1.ª Fig. 4.ª) che poggia sul muro del Tamburo H, I, C, D, col contrafforte F, C, A, che lo regge. Si è abbassato il costolone e tutta la volta da M in m. Si è aperta in I l' imposta della volta stessa andando il punto H in I, il muro D, H, I, C, del Tamburo colla parte inferiore della base su cui poggia ha girato attorno l'angolo C portandosi in D, I, i, C, rimanendo sforzato in sè stesso a varie altezze ed aperto con lesioni orizzontali principalmente nelle finestre, ed il contrafforte con tutto quel pezzo di base su cui insiste ha rotato intorno l'angolo A.

45. Essendo il muro del Tamburo spinto all' infuori da tanta spinta, conservandosi salda e collegata la base col corrispondente contrafforte collo stesso muro del Tamburo, era natural

cosa che invece di rovesciare tutta la massa ruotando in fuori si squarciasse il muro con una generale frattura che dal pavimento del corridore progredisse sino al cornicione del contrafforte. Molto più per la sottigliezza del muro stesso di metri 2,67; per la volta di metri 2,00; e dell' apertura nel contrafforte di metri 0,72. Così si dà ragione del perchè le aperture del Tamburo si allargano dal basso all' alto, ed i circoli orizzontali del Tamburo s' ingrandiscono parimenti dal basso all' alto. Di questi guasti dovevano sentirne l'effetto le scale a chiocciola situate nell' interno, come di fatto è accaduto.

46. Il punto N dovea inclinare in dentro in n piegandosi la M, N, in m, n, movimento che essendogli contrastato dal Cupolino e dalla incompenetrazione delle parti che si toccano nell' interna circonferenza dell' occhio della Cupola, il muro m, n, aveva a rompersi, obbligando il punto superiore n a dare indietro, e questo effetto appare appunto in certe altre fessure che traversano i costoloni, e per lo stesso motivo dovevano i distacchi estendersi in giù lungo le commessure de' costoloni cogli spicchi, e nuovi difetti ne potevano originare come avvenne.

47. Tale è l'opinione che è per la mente de' tre ricordati Professori, e tutti gli effetti corrispondono mirabilmente secondo le loro viste allo stabilito sistema. A chi obbiettasse che i cerchii stringenti la Cupola dovevano spezzarsi pel dilatamento, si risponde primamente non potersi negare qualche frattura essendo quasi tutti coperti, e ammessane pure la frattura bisognerebbe conoscere con quale diligenza furono da prima lavorati; finalmente nulla può concludersi stantechè i pilastri de' contrafforti non strapiombano in fuori anzi alcuni strapiombano all' indentro ed alcuni sono verticali, e da principio certamente dovettero essere costrutti inclinati a scarpa essendo come speroni.

48. Esposte le quali cose credono difeso il loro generale si-

stema del movimento eseguito, e riflettono che n'è la causa l'eccesso del peso di cui sono caricate le parti superiori della Cupola, e l'insufficienza di resistere delle parti inferiori. A dilucidamento mettono in campo l'esempio d'una palla pesante posta sur un piano inclinato che non solo scende ma precipita; e l'esempio d'un bastone che si sforzi di sdrucciolare fra due piani levigatissimi.

49. Finiscono col mettere in giuste bilance il mutuo contrasto delle forze. Due sono quelle che spingono, cioè il peso del Cupolino, de' costoloni, e degli spicchi; e due parimente quelle che resistono, cioè i cerchii di ferro ed il sostegno che si compone della base del Tamburo, e de' contrafforti coadiuvato dalla tenacità del cemento che si neglige.

50. A rintracciare la forza assoluta della spinta orizzontale prodotta dal Cupolino e Cupola; e la resistenza che vi oppone, calcolarono tutto il peso della Cupola, e trovarono che il Cupolino pesa chil. 1384839,71; le Cupole co' costoloni chil. 17011823,40; il Tamburo coll' ordine attico chil. 16291065,37; i contrafforti chil. 4526968,08; la base chil. 16994640,90.

51. Quanto alla forza assoluta de' cerchii, e alla ricerca delle proporzioni de' momenti de' pesi che contrastano, la calcolano per mezzo d'un problema, di cui tutto si tace meno il risultato, eglino trovano che la forza del cerchio più alto equivale a chil. 433842,21; e del più basso a chil. 473757,80; quindi la forza complessiva risulta di chil. 907600,01.

52. Ecco i dati tutti co' quali i nostri Architetti poterono formolare le opportune equazioni e scoprire sino a qual termine arrivano le forze in contrasto, e rinvennero che la spinta prodotta dal Cupolino emerge di chil. 1006044,85, e quella prodotta dalla Cupola co' costoloni di chil. 2175791,78, le quali som-

mano a chil. 3181836,68; e rinvennero che la forza che si oppone alla spinta risulta di chil. 2082041,55; che si ottiene dalla resistenza dell' attico di chil. 294333,74; dalla resistenza che vi oppone la parte smossa del Tamburo di chil. 429787,91; da quella prodotta dai contrafforti staccati di chil. 194946,51; e finalmente da quella cagionata dalla parte esterna della base di chil. 255386,35; non che da quella de' cerchii di ferro di chil. 907600,01.

53. Il perchè concludono che la forza che spinge supera d'avvantaggio quella che resiste, che la residuale spinta di chil. 1099795,13, premendo di continuo il Tamburo ed i cerchii ha costretto, il primo a piegarsi di fuori, ed i cerchii a dilatarsi. Nè mai cessando questa spinta ad ogni piccola scossa, o di tremuoto, o di qualunque intemperie potrebbe la gran mole ruinare; onde sarebbe imprudenza il lasciarla come è.

54. E la loro missione qui non tocca la meta. Dopo avere scoperti i difetti, e scoperte le cause che li originarono, si esigeva da loro rimedii al male opportuni. E siccome non trattavasi solamente di assicurarne l' equilibrio, ma di non comprometterne la stabilità, così pensarono essi di avvalorare la resistenza, e reputarono idonei all' uopo cerchioni di ferro e suggerirono di premunire la Cupola verso l' imposta con un cerchio di ferro largo almeno metri 0,09; grosso metri 0,05, essendo ivi per le cose dette la resistenza d'un cerchio alla spinta orizzontale maggiore che altro, e la resistenza opposta del cerchio equivarrebbe una forza quasi eguale allo sbilancio di chil. 687000. E proposero quindi un secondo cerchio verso il mezzo della Cupola che sarebbe d'un effetto doppio perchè non farebbe nascere aperture ne' costoloni e svilupperebbe una resistenza laterale ad impedire l'obbliqua discesa de' medesimi.

55. Quanto a rinforzo del sostegno della Cupola prescelsero

pure l'uso de' cerchioni, e proposero tre grandi cerchii di ferro, il primo da porsi nel muro interno del corridore presso alla sua volta, il secondo fuori del medesimo nella sua base esterna a livello del primo, e finalmente il terzo sotto il cornicione del Tamburo. E sul riflesso che la spinta orizzontale potesse spezzare l'attico, decretarono di alzare sopra il cornicione de' contrafforti, uno sperone che abbracciasse più in alto la Cupola. Così con questi rimedii si reputò la stabilità della Cupola assicurata.

56. Il Marchese Poleni essendosi formata con la sua catenaria l'idea che la gran volta agiva per isfiancare non vedeva altro opportuno provvedimento che i cerchii onde opporre una resistenza a quella spinta; e così questi Matematici sommi, chi per una via chi per un' altra combinarono nella scelta de' rimedii da adottarsi, e furono posti in opera accerchiandosi di cinque cerchii di ferro tutta la Cupola. I primi due si posero nell' Agosto e Settembre del 1743, l'uno del diametro di metri 59,31 posto ne' piedestalli de' contrafforti, di trentasei pezzi e del peso di chil. 11042,64. Il secondo del diametro di metri 50,04 di trentatrè pezzi, e del peso di chil. 9315,82; fu messo sopra il cornicione dell'ordine principale del Tamburo, ossia nel primo zoccolo dell' attico. Nel Maggio e Giugno 1744 furono messi altri due, uno del diametro di metri 49,14 di trentadue pezzi, del peso di chil. 9149,46 fu posto al sommo dell'attico al nascere della curvatura esterna, il quale passa sotto i risalti de' costoloni, e resta murato e coperto sotto il piombo. L' altro del diametro di metri 41,99 di ventuno pezzi, del peso di chil. 780,72, fu collocato verso la metà del ventre della Cupola. Il quinto del diametro di metri 16,08 di sedici pezzi, del peso di chil. 307,83 nell' Agosto e Settembre dello stesso anno; fu locato nell' impostatura del Cupolino ed incassato come tutti gli altri. Tutti i

descritti cerchii, avevano metri 0,054 di grossezza, e metri 0,090 di altezza.

57. Dopo che la Cupola fu cinta dalli predetti cinque cerchioni di ferro si venne al riattamento della medesima, ossia alla stuccatura delle lesioni; in tale occasione il cerchio di ferro (14) posto in costruzione che abbraccia la Cupola interna al principio del suo nascimento, si trovò rotto in due punti. Uno che corrisponde sopra la prima finestra del Tamburo fra i contrafforti che s'incontra da quella di mezzo sopra la Cattedra andando verso il pilone di S. Elena, e nel sito della rottura i due pezzi del cerchio erano discosti l'uno dall'altro metri 0,036. Il secondo punto di rottura fu trovato sulla finestra del Tamburo in mezzo al pilone della Veronica nel costolone sinistro, e i due pezzi di catena erano distaccati l'uno dall'altro metri 0,056. Si notò che i lati di rottura nella prima erano verticali, nella seconda obbliqui ed irregolari: in entrambe poi si osservavano sulle teste de' due pezzi di cerchio una quantità di fibre del ferro distaccate fra loro a guisa di moltissime punte piramidali di varie lunghezze sottilissime. L'altezza del cerchio è di metri 0,078; la grossezza di metri 0,042.

58. Per consiglio del lodato Sig. Marchese Poleni, a causa del descritto danno, la Cupola Vaticana fu cinta di un sesto cerchio di ferro, sotto il prim' ordine delle finestre dette dei mezzanini, situato nel pieno della Cupola circa metri 0,66 più basso dell' antico interiore spezzato. L' altezza del cerchio è di metri 0,09; la larghezza di metri 0,054. Il cerchio spezzato fu ristabilito con due pezzi nuovi di ferro della consueta grossezza descritta, messi ne' punti spezzati.

59. Finora per noi non si è fatto che esporre in compendio i sistemi di questi dotti Architetti, e toccare de' proposti provvedimenti. Ora ci sia permesso di prendere ad esame que-

ste loro opinioni, a solo oggetto di mettere in miglior luce la verità. L'equilibrio e la stabilità d'una Cupola è una funzione dell' indole e delle affezioni della curva d' intradosso, dal peso su di essa distribuito, e dal particolare carico che gravita alla cima. Queste quantità devono avere tale rapporto che ne risulti il perfetto e stabile equilibrio.

60. Sieno lodi alle infaticabili cure del Poleni che diè mano ad investicare la differenza fra la linea de' centri di gravità de' cunei componenti ogni singolo spicchio, e la linea catenaria dipendente dal peso de' cunei stessi. Ardua e bella ricerca, ma pur troppo desta occasione di dubitarne dell' esattezza, poichè la linea de' centri di gravità gratuitamente si fissa circa il mezzo tra le curve d' intradosso ed estradosso. E in un problema di tanto momento le ipotesi troppo vaghe, le differenze anche piccole meritano considerazione. Chi sà di quanto la linea de' centri si allontana dalla traccia assegnatale dal Poleni. Inoltre non si sà di quanto la sua catenaria si accosti alla linea de' centri. L'Autore pone che i pesi de' cunei scemino con data legge dall' imposta della volta sopra il Tamburo sino all' occhio del Cupolino. Ma quale è questa legge? In fatto sussiste? Finalmente i materiali disegni che tante e difficili misure richieggono, corrispondono fedelmente al vero?

61. In queste avvegnachè bellissime investigazioni non mancano tenebre d' incertezze. Egli è pertanto a credere che la figura della volta non è mal condizionata alle leggi statiche, ma pure tende a sfiancare dall' indentro all' infuori, il perchè esigge che si mettono in opera cerchii di ferro. Ma se la figura della Cupola è idonea alla stabilità perchè aver ricorso a provvedimenti incerti e dispendiosi? Questi cerchii che accrescono il peso che gravita, gioveranno o nuoceranno?

62. I tre Matematici Boscovik, Le-Leur, e Jacquer, cui si

debbe meritamente far plauso per tante prodigate fatiche, stabiliscono il loro sistema sulla persuasione che tutti i danni ripeter si debbono dalla pressione del Cupolino, de' costoloni, e della gran volta; pressione che abbia potuto spingere in fuori il Tamburo. Cominciato che sia una volta il moto orizzontale da loro ammesso non è facile che subito si cessi, conciosiachè il peso che ne è la causa non si muta, e persistendo la spinta avrebbe dovuto il moto continuare, e la Cupola ruinare. Se il peso del Cupolino che preme in N M, (Tav. 1.ª Fig. 4.ª) entrambe le Cupole ed i costoloni che le sostengono unite, accresciuto del peso proprio delle Cupole, è stato bastante a spostare il Tamburo con i contrafforti e la base comune, perchè non ha immediatamente agito sull'ordine attico nell' imposta della stessa volta? Doveva secondo essi nascere in I una gran fessura e dovea l'attico essere spinto in fuori notabilmente.

63. A meglio convalidare il loro sistema ammettono delle aperture non orizzontali ma d'alto in basso ed inferiscono che i massi de' costoloni rimasti integri sieno discesi in virtù della pressione del Cupolino con quella delle due volte. Ma quali segni di lesioni sì manifesti provano quest' asserto? Di mille altre cause non ponno esser effetto questi guasti? Nè si argomentino forti prove in favore delle spaccature degli architravi dei finestroni che mostrano certamente d'aver patito poichè questo difetto potrebbe esser loro proprio. Le soventi volte in edificii che non hanno degradazioni nell' universale si osservano gli architravi delle porte e delle finestre che hanno sofferto pel proprio peso e per quello che v' insiste.

64. E come può stare che tanto strepitoso abbassamento di sedici costoloni sia avvenuto regolarmente senza dar segno di lor movimento, e sono pure pesanti e parti sostanziali della fabbrica e soggette nel caso di qualche movimento a maggiori

scosse? Dovevano dunque mostrare moltissime crepature orizzontali e verticali, ma questi risentimenti non compariscono!

65. I tre Matematici giunti alla conclusione trovano come fu detto che le forze attive a rovesciare la Cupola sommano a chil. 3181836,68; le forze passive non montano che a chil. 2082041,55; di guisa che l'eccesso della spinta sulla resistenza sarebbe di chil. 1099795,13. Ma se ciò fosse come potrebbe reggersi tanta mole non essendovi neppure l'equilibrio del puro istante? Dunque avvi nascosto certamente un errore, che a noi pare doversi aggiudicare alla fallacia del metodo dei calcoli, non de' dati ed elementi, perchè sarebbe rimproverar loro una troppo grossolana mancanza.

PARTE TERZA

DIMOSTRARE IN VIRTU' DEL CALCOLO E DELLE TEORICHE MECCANICHE LE GROSSEZZE CHIESTE DALLA NATURA PER L'EQUILIBRIO DELLA NOSTRA CUPOLA. PARAGONE COLLE EFFETTIVE. INVESTIGAZIONE DEL VALORE DELLA SPINTA ORIZZONTALE E DELLA RESISTENZA RISPETTIVA; DELLA TENSIONE ORIZZONTALE IN OGNI SINGOLO PUNTO, E DELLE RISPETTIVE RESISTENZE. CONFRONTO FRA QUESTE FORZE. DETERMINAZIONE DELLA SPINTA CHE SI ESERCITA SOPRA IL TAMBURO, E DELLA RESISTENZA CHE ESSO VI OPPONE; RAPPORTO FRA QUESTE FORZE. RAGIONI DELLE CAUSE PRODUTTRICI LE LESIONI. DESCRIZIONE DELLO STATO ATTUALE DI SOLIDITA' DELLA CUPOLA E DE' LAVORI CHE AVREBBONSI A FARE PER VIEPPIU' ASSICURARLA.

66. Qualunque Cupola non è altro che un sistema di forze, le quali mentre spingono, o premono le parti della fabbrica, si spingono e reciprocamente si premono, cosicchè tendono alla distruzione dell' edificio, ed in pari tempo alla sua conservazione; quindi il giudicio della stabilità della Cupola nostra dipende dal paragone di queste forze fra loro, mentre, se si elidono le azioni che queste forze esercitano sulla fabbrica, essa è equilibrata, e questo equilibrio sarà più o meno solido, secondo che più o meno, le forze che tendono alla conservazione della fabbrica sono maggiori di quelle che tendono alla sua distruzione. Per istituire questo esame è d' uopo considerare ad una ad una le diverse parti che compongono la Cupola, e le diverse forze che agiscono sopra ciascuna di esse, e i moti che tendono ad imprimervi le forze applicate. Esaminando ciascuno

di questi moti, paragonando le forze che vi resistono con quelle che virtualmente li animano, avremo un criterio certo e saldissimo per giudicare della stabilità della Cupola Vaticana.

67. Il Bouguer (*) con evidenza dimostra come le Cupole circolari convesse all' asse, e le coniche sono in equilibrio e solide abbastanza di per se stesse. Difatti immaginiamoci un filare di cunei adagiati sopra una superficie conica col vertice all' asse della Cupola, essi sono spinti in dentro, e siccome questa spinta è uguale in ciascun cuneo ed opposta a quella che esercita il cuneo d'incontro, dal contrasto succede che si elidono queste spinte e la Cupola stà.

68. Similmente avviene delle concave all' asse, la cui concavità non basterebbe a sostenere i pezzi che la compongono, ma la figura circolare d'ogni rispettivo piano sopra cui poggiano i cunei supplisce al difetto. Lo sforzo per cui ciascun cuneo è spinto in dentro è uguale e comune ad ogni altro del medesimo filare poggiato sul piano. In queste Cupole però a curva meridiana concava all' asse, si giunge a stabilire una convessità tale che è il limite che soddisfa all'equilibrio, onde se si accresce, i cunei componenti ogni zona vengono spinti all' infuori dalla pressione che la parte sovrincombente ingenera, e quindi si turba l' equilibrio, e si accelera la ruina della mole. Dunque nella convessità della curva d'estradosso avvi un limite che nella concavità della curva d'intradosso manca.

69. Lo perchè giova rintracciare col calcolo questo limite a cui può arrivare la convessità della curva meridiana d'estradosso di qualsivoglia Cupola, onde servirsene nella costruzione di simili edificii, e non oltrepassarlo se vogliamo che restino a sfidare i secoli, e tramandare ai posteri i portenti dell' arte.

(*) Mem. de l'Acad. des Sc. du Paris 1734.

70. La Fig. 1.ª (Tav. 2.ª) rappresenta un unghia solida d'una Cupola simmetrica rispetto all'asse a E, della medesima. E sia quest' unghia nata per la rotazione della curva A M K. Immaginiamo che la Cupola in un circolo parallelo qualunque sia caricata d' un peso uniformemente distribuito all' intorno del parallelo, e sia K k, la porzione del Tamburo sulla quale posa l' unghia. L' unghia s' intende formata d' infiniti cunei pesanti non connessi con cemento od altro, ed uno di questi sia M m. Di essa consideriamo la porzione M a n: le forze esistenti sono tre, il peso proprio dell' unghia, il peso estraneo che gravita sopra di essa e cospira di concerto col peso dell' unghia ed agisce verticalmente, e la spinta orizzontale che essa sostiene alla cima generata dall' unghia che v' è d' incontro.

71. Per l'equilibrio è necessario che la risultante delle tre forze cada perpendicolarmente nel letto dell' unghia, o pure declini piegando verso l' asse, ossia verso l' interno della Cupola, e non mai verso la parte opposta; e deve questa risultante passare per qualche punto del letto M n, perchè cadendo fuori roterebbe l' unghia attorno a quello de' due spigoli n′ n, M v, verso cui fosse più vicina. Se poi cadesse in qualche punto del letto, ma obbliquamente verso l' infuori non potrebbe sorreggere l'equilibrio perchè nessuna forza si oppone allo scorrimento de' cunei dal di dentro all' infuori: se piegasse verso l' interno della Cupola l'unghia M a n, tenderebbe a sdrucciolare da n′ verso M, ed essendo questa tendenza la medesima in tutte le altre unghie, ed essendo queste forze uguali ed esercitandosi contemporaneamente, incontra che si elidono a vicenda, e l' equilibrio della Cupola non soffre turbamento.

72. Consideriamo la porzione M a n, dello spicchio insistente sul letto M n; chiamiamo S la spinta orizzontale che si esercita alla sua cima in A a ; $\int$ Y d y denoti il peso della por-

zione M a n; Q il peso che sopra vi gravita; e ω l'obbliquità del letto M n, alla verticale. Figuriamoci un piano verticale che passi per la direzione della spinta orizzontale S; in esso cadrà il centro di gravità dell'unghia, e la direzione del peso estraneo sovrincombente; onde per l'unghia M a n, basterà prendere in esame questo piano rappresentato in M a n'. Le due forze $\int Y\,d\,y$ e Q parallele, siano espresse da G V, verticale, e la S da V S', orizzontale, e poniamo che ambedue concorrino nel punto S'. Siccome la G G', risultante deve essere per l'equilibrio normale al letto M n, avviene che i due triangoli G S' V ; M S' n', sono simili, onde l'analogia

$$G\,V : S'\,V = n'\,S' : M\,S'$$

ma $$n'\,S' = \text{sen.}\,\omega\ ,\ M\,S' = \cos.\,\omega$$

quindi $$G\,V : S'\,V = \text{tang.}\,\omega : 1$$

ossia $$(\int Y\,d\,y + Q) : S = \text{tang.}\,\omega : 1$$

$$\int Y\,d\,y + Q = S\ \text{tang.}\,\omega\,.$$

73. Le tre predette forze potendo combinarsi di guisa che la G S', declini dall'interno verso l'asse: il rapporto di

$$\frac{G\,V}{S'\,V}$$

può non essere uguale a tang. ω, anzi accostandosi il punto S' in questo caso più di prima a V sarà in generale

$$\int Y\,d\,y + Q > S\ \text{tang.}\,\omega\,.$$

74. Se il pulvinare su cui poggia l'unghia giace orizzontale, l'angolo ω risulta retto e

$$\text{tang.}\,\omega = \infty$$

per l'equilibrio adunque dovrebbe essere infinito il peso

$$\int Y\,d\,y + Q$$

ed infinita la grossezza della Cupola insistente sul Tamburo, onde questa teoria non sarebbe d'alcun vantaggio reale all'Ar-

chitettura, solo ci avviserebbe a non fabbricare Cupole in aperta contradizione colla statica.

75. Le Cupole costrutte secondo le regole di questa teoria, ripetono la loro solidità dal contrasto che i cunei esercitano tra loro reciprocamente. E quando anche fossero sconnessi, slegati, e levigati nelle loro faccie da poter sdrucciolare liberamente senza sentire l'attrito, la fabbrica reggerebbe stabilmente in equilibrio.

76. L'arte può avvalorare e porre resistenza allo scorrimento de' cunei, come con eterna lode seppero praticare gli antichi. Il loro studio precipuo consisteva nel taglio de' cunei, e senza l'uso della malta innalzarono superbe moli di pietra da taglio, delle quali le poche reliquie al tempo ed alla barbarie scampate, mostrano la robustezza e la perfezione degli edificii di cui sono memorie. I cunei erano artificiosamente collegati in guisa che l'uno non potea disgiungersi dagli altri, se non ruinava l'intera mole del muro, ed erano collegati o con perni metallici, o con immorsature scambievoli. Il Colosseo, ed il Teatro di Marcello in Roma ci offrono esempi di queste due maniere diverse d'allacciamento de' cunei. Ma oltre queste resistenze evvi l'attrito che vi oppone la natura, ed ha non piccola parte a ritardare ed impedire lo scorrimento de' cunei tra loro. Per queste cause tutte vedremo che alle Cupole si ponno dare forme e dimensioni diverse da quelle che l'equazione vorrebbe, e nondimeno solide. Perciò torna a giovamento onde applicare alla pratica l'equazione d'equilibrio, farvi sentire l'effetto dell'attrito; perchè in allora la tenacità de' cementi, e le allacciature non vengono ad essere più causa d'equilibrio, ma vantaggio della stabilità.

77. Vediamo adunque come l'equazione d'equilibrio si modifica avendo riguardo all'attrito. Sia P il peso dell'unghia accresciuto del peso del Cupolino, cioè

$$P = \int Y\, d\, y + Q.$$

Sia M O, (Fig. 2.ª Tav. 2.ª) il profilo del letto di un cuneo sopra del quale insiste l' unghia di peso P, e sia l' angolo C M O $= \omega$: la B V rappresenti il peso P, e la F E la spinta S dell' unghia opposta. Siano c′ B, r′ B ; c E, c F, le componenti di B V, e della spinta S, perpendicolari e parallele al profilo del cuneo, emerge dall' ispezione de' triangoli rettangoli

$$c' B = P \text{ sen. } \omega, \; r' B = P \cos. \omega, \; c E = S \cos. \omega$$
$$c F = S \text{ sen. } \omega.$$

Essendo le forze che producono la pressione perpendicolari al profilo del cuneo e cospiranti sarà

$$S \cos. \omega + P \text{ sen. } \omega.$$

La forza che agisce parallelamente al piano è generalmente

$$\pm P \cos. \omega \mp S \text{ sen. } \omega.$$

Stando ai segni superiori l'unghia tende da M verso O, e viceversa stando agli inferiori. Ad ambo questi movimenti contrasta l'attrito espresso da

$$f P \text{ sen. } \omega + f S \cos. \omega$$

f essendo il coefficiente del medesimo, onde per l' equilibrio debba sussistere l'equazione

$$\pm P \cos. \omega \mp S \text{ sen. } \omega = f P \text{ sen. } \omega + f S \cos. \omega.$$

78. Riflettendo ai doppi segni del primo termine di questa equazione, tosto ci accorgeremo che dobbiamo ritenere soltanto i segni superiori, vale a dire l'angolo ω deve esser tale che soddisfi alla condizione che la differenza

$$P \cos. \omega - S \text{ sen. } \omega$$

sia sempre positiva; allora avremo una forza che spinge ciascun cuneo della Cupola dall' infuori all' indentro, e nulla turberebbe l'equilibrio: mentre se la predetta differenza risultasse negativa allora in ciascun cuneo esisterebbe una forza che tenderebbe a far schizzare i medesimi dall' indentro all' infuori, e la Cupola avrebbe in se stessa questo germe di distruzione.

79. Nel caso adunque che noi vogliamo considerare avremo

$$P = S \frac{\text{sen. } \omega + f \cos. \omega}{\cos. \omega - f \text{ sen. } \omega} = S \frac{\text{tang. } \omega + f}{1 - f \text{ tang. } \omega} .$$

Non calcolando l'attrito, il peso dell'unghia per l'equilibrio è espresso da $S \text{ tang. } \omega$
calcolandolo sarà rappresentato dalla funzione

$$S \frac{\text{tang. } \omega + f}{1 - f \text{ tang. } \omega}$$

e la condizione d'equilibrio si muterà in

$$\int Y \, d \, y + Q > S \frac{\text{tang. } \omega + f}{1 - f \text{ tang. } \omega} .$$

80. Osservammo che fatta astrazione della resistenza dell'attrito il pulvinare non potea essere orizzontale (74): ora vediamo come benissimo possa giacere orizzontalmente. Osservammo ancora che per l'equilibrio la risultante del contrasto fra il peso dell'unghia, e la spinta orizzontale, dovea cadere ad angolo retto sopra il pulvinare (72), o convergere all'interno verso l'asse (73): ora vediamo come se si considera l'attrito, quanto quell'angolo può declinare dal perpendicolo affinchè i cunei non soffrano una reazione dall'indentro all'infuori. Sia M O (Fig. 2ª Tav. 2ª) il letto inclinato, e sia B V la direzione della risultante quando l'unghia è nel procinto di strisciare all'indentro, o all'ingiù lungo M O; chiamiamo ω l'angolo B V M, P la detta risultante, e decomposta in due forze l'una normale l'altra parallela ad M O avremo che l'unghia tende a cadere all'indentro con forza $P \cos. \omega$, e preme il pulvinare con forza $P \text{ sen. } \omega$.
È dunque l'attrito, $f P \text{ sen. } \omega$
e poichè esso equilibra la forza che il corpo fa per sdrucciolare all'indentro sarà $f P \text{ sen. } \omega = P \cos. \omega$
ossia $f = \cot. \omega$.

Adunque nel caso che contempliamo la risultante può declinare dal perpendicolo con angolo la cui cotangente sia f. Dunque la teorìa così modificata, ed applicata con le debite avvertenze sarà norma certa e saldissima per la costruzione delle Cupole; e l'Architettura si valerà della medesima con vantaggio reale in questi casi certamente i più difficili.

81. Per calcolare il peso del cuneo Y d y rappresentato da M m (Fig. 1ª Tav. 2ª) chiamiamo z la grossezza M n′ della Cupola nel punto M, a cui corrisponde l'ascissa x. Condotta F H a bisecare le basi del trapezio M u; ed essendo in m il centro di gravità, il volume del solido sarà, l'area del quadrilatero M u moltiplicata pel viaggio descritto dal centro di gravità m, secondo la teoria di *Guldin*. Il centro di gravità dista dal lato M N della lunghezza

$$F\,m = \frac{1}{3}\,z\,\frac{d\,s + 2\,d\,s + 2\,z\,d\,\omega}{d\,s + d\,s + z\,d\,\omega} = \frac{1}{3}\,z\,\frac{3\,d\,s + 2\,z\,d\,\omega}{2\,d\,s + z\,d\,\omega}$$

perchè $M\,N = d\,s$, $n'\,u = d\,s + z\,d\,\omega$. Dal centro m abbasso la normale m Q sulla verticale innalzata da F, e suppongo senza error sensibile l'angolo

$$m\,F\,Q = \omega$$

sarà dunque $$m\,Q = F\,m \text{ sen. } \omega$$

e protratta m Q all'asse fino in P, e guidata la F E che può porsi uguale ad y, sarà

$$m\,P = m\,Q + Q\,P = m\,Q + F\,E =$$
$$y + m\,F \text{ sen. } \omega$$

espressione del raggio del circolo descritto dal centro di gravità. L'angolo descritto dal centro di gravità può ritenersi lo stesso dell'arco M v che chiamo α. Il viaggio perciò del centro m di gravità sarà

$$(y + F\,m \text{ sen. } \omega)\,\alpha = \left(y + \frac{1}{3}\,z\,\frac{3\,d\,s + 2\,z\,d\,\omega}{2\,d\,s + z\,d\,\omega} \text{ sen. } \omega\right)\alpha.$$

82. Per calcolare l'area del quadrilatero M u che esprime il profilo del cuneo, conduco N p parallela ad M n'. Nel triangolo u N p si ha l'angolo

$$u\,N\,p = d\,\omega.$$

Se col raggio N p, ed il centro N descriviamo l'archetto p q, emerge

$$p\,q = z\,d\,\omega$$

e l'area del triangolo u N p sarà

$$\frac{1}{2}\,z^2\,d\,\omega\,.$$

Il trapezio M p può considerarsi un parallelogrammo, onde l'area sarà $M\,n\,.\,M\,N$ sen. $n'\,M\,N$.

Essendo l'angolo n' M N supplemento de' due angoli ω ed N M r si ottiene

$$\text{sen. } N\,M\,n' = \text{sen. } (\omega + N\,M\,r) =$$
$$\text{sen. } \omega \cos. N\,M\,r + \cos. \omega \text{ sen. } N\,M\,r;$$

essendo pel triangolo rettangolo N M r

$$d\,x = M\,N \cos. N\,M\,r\,,\ d\,y = M\,N \text{ sen. } N\,M\,r$$

abbiamo

$$M\,N \text{ sen. } N\,M\,n' = d\,x \text{ sen. } \omega + d\,y \cos. \omega$$

dunque l'area del trapezio M p è

$$z\,(d\,x \text{ sen. } \omega + d\,y \cos. \omega).$$

Sommando le due aree del triangolo e del trapezio si ha l'area del quadrilatero M n' N u espressa per

$$\frac{1}{2}\,z^2\,d\,\omega + z\,(d\,x \text{ sen. } \omega + d\,y \cos. \omega).$$

83. Moltiplicando questa superficie pel viaggio del centro di gravità del solido M m, risulta il solido stesso, e quindi la condizione d'equilibrio d'una cupola sarà chiamando G la gravità specifica della materia di cui è composta

$$\alpha\,G \int \left(\frac{1}{2}\,z^2\,d\,\omega + z\,(d\,x \text{ sen. } \omega + d\,y \cos. \omega)\right)$$

$$\left(y + \frac{z \text{ sen. } \omega}{3} \cdot \frac{3\, d\, s + 2\, z\, d\, \omega}{2\, d\, s + z\, d\, \omega} \right) + Q >$$

$$S \frac{\text{tang. } \omega + f}{1 - f \text{ tang. } \omega} .$$

84. Data la curva d'intradosso, e la legge dell'obbliquità de' cunei si può per questa espressione assegnare le grossezze z che convengono a ciascun punto della Cupola: o viceversa data la grossezza che si vuol dare in ciascun punto alla volta, e la curva d'intradosso si ponno trovare le obbliquità de' cunei. Ma questi due generali problemi d'equilibrio non ammettono soluzione che sotto particolari condizioni.

85. In pratica si producono i letti de' cunei perpendicolari alla curva d'intradosso, come insegna Monge, onde gli angoli di due cunei consecutivi essendo uguali fra loro resistono ugualmente alla rottura nella mutua azione che essi fra loro esercitano. Ciò posto l'espressione del solido M m diviene più semplice perchè

$$\text{sen. } \omega = \frac{d\, x}{d\, s}, \quad \cos. \omega = \frac{d\, y}{d\, s}, \quad \text{tang. } \omega = \frac{d\, x}{d\, y}$$

$$R = \frac{d\, s}{d\, \omega}$$

R essendo il raggio osculatore della curva d'intradosso; il primo fattore del volume del solido resta

$$\frac{1}{2} z^2\, d\, \omega + z\, d\, s = \frac{1}{2} z^2\, d\, \omega + z\, R\, d\, \omega$$

ed il secondo

$$y + \frac{1}{3} z \text{ sen. } \omega \frac{3\, R + 2\, z}{2\, R + z}$$

Ancora. Essendo z piccola a confronto di R si può nel primo fattore negligere $\frac{z^2}{2}$

e stimare $R\,z$

e nel secondo negligendo z in paragone di R rimane

$$y + \frac{1}{2}\, z \text{ sen. } \frac{3}{2}\,\omega$$

riducendo viene

$$\alpha\, G \int \left(z\, y\, d\, s + \frac{z^2\, d\, x}{2} \right) + Q > S \frac{\text{tang. } \omega + f}{1 - f \text{ tang. } \omega}.$$

Ancora. Le Cupole presso al vertice hanno poca convessità; in questo caso se y è prossimamente uguale a z è piccolo, d x è disprezzabile in confronto di d s, ed il secondo termine del volume di M m può trascurarsi rapporto al primo. Se poi y sia cresciuto di molto, il primo termine che involve la y è grandissimo in confronto del secondo che involve la z, e quindi qualunque sia y si può trascurare il secondo termine rispetto al primo. Bouguer e Venturoli ci garantiscono queste semplificazioni. L'espressione del solido M m si riduce a

$$z\, y\, d\, s$$

e per l'equilibrio sarà

$$\alpha\, G \int z\, y\, d\, s + Q > S \frac{\text{tang. } \omega + f}{1 - f \text{ tang. } \omega}$$

da essa si ha chiamando

$$\frac{1}{\text{tang. } \omega} = F'(x)$$

$$G \int z\, y\, d\, s + Q > S \frac{1 + f\, F'(x)}{F'(x) - f}$$

e facendo $\alpha = 1$

lo che è di nostro arbitrio, quindi hassi prendendo i logaritmi, e

poscia moltiplicando il primo membro dell' ineguaglianza per n numero fratto, e positivo, onde porre l'eguaglianza

$$n \log. G \int z\, y\, d\, s = \log. S \left(\frac{1 + f F'(x)}{F'(x) - f} - \frac{Q}{S} \right)$$

quindi passando dai logaritmi ai numeri e differenziando viene, fatte le opportune operazioni

$$z = - \frac{S}{n G y d s} \left(\frac{1 + f F'(x)}{F'(x) - f} - \frac{Q}{S} \right)^{\frac{1}{n} - 1} \frac{F''(x)(f^2 + 1)}{(F'(x) - f)^2} d x$$

formola assai comoda per esaminare se una Cupola soddisfaccia alla condizione d'equilibrio; data la curva generatrice della Cupola, e data la scala delle grossezze, esaminare se tal Cupola sia per essere equilibrata: oppure data la curva generatrice d'intradosso della Cupola, trovare la scala delle grossezze convenienti per l'equilibrio.

86. Se fosse $Q = 0$

vale a dire senza il Cupolino, allora la scala delle grossezze per una tal Cupola sarebbe

$$z = - \frac{S}{n G y d s} \left(\frac{1 + f F'(x)}{F'(x) - f} \right)^{\frac{1}{n} - 1} \frac{F''(x)(f^2 + 1)}{(F'(x) - f)^2} d x.$$

87. Se in questa equazione, o nella generale facciamo l'ipotesi di $n = 1$

avremo la semplificazione

$$z = - \frac{S}{G y d s} \cdot \frac{F''(x)(f^2 + 1)}{(F'(x) - f)^2} d x$$

la quale è indipendente dalla quota del peso Q del Cupolino; ed in fatti la condizione ammessa induce l'altra che la risultante

sia sempre perpendicolare ai letti de' cunei; adunque la scala delle grossezze che si richiedono per l' equilibrio delle Cupole, deve essere per l'ipotesi la medesima sia o non vi sia il Cupolino.

88. L'equazione della curva d' intradosso della nostra Cupola Vaticana riferita coll' origine delle coordinate nel punto H (Fig. 2ª Tav. 1ª) centro dell' occhio della lanterna è

$$x^2 + y^2 + \Delta y - 2 D x - \frac{3}{4} \Delta^2 = 0$$

quindi si ha

$$y\, d s = \left(- \frac{\Delta}{2} + \sqrt{\Delta^2 + 2 D x - x^2} \right) \frac{d x \sqrt{\Delta^2 + D^2}}{\sqrt{\Delta^2 + 2 D x - x^2}}$$

$$F'(x) = \frac{D - x}{\sqrt{\Delta^2 + 2 D x - x^2}}$$

$$F''(x) = - \frac{\Delta^2 + D^2}{(\Delta^2 + 2 D x - x^2) \sqrt{\Delta^2 + 2 D x - x^2}} .$$

89. Il limite delle minori grossezze che la natura richiede per l'equilibrio d'una qualsivoglia Cupola, hassi allorquando la risultante delle forze cade perpendicolare sopra il letto de' cunei che la compongono. Adunque posti i precedenti valori nella formola della scala delle grossezze ottenute in quest' ipotesi, avremo la scala delle minime grossezze che la natura richiede per l'equilibrio della Cupola Vaticana espressa dalla equazione

$$z = S \frac{(f^2 + 1) \sqrt{\Delta^2 + D^2}}{G \left(- \frac{\Delta}{2} + \sqrt{\Delta^2 + 2 D x - x^2} \right) \left(D - x + f \sqrt{\Delta^2 + 2 D x - x^2} \right)^2}$$

adunque le grossezze effettive della Cupola Vaticana almeno dovranno concordare con le date della predetta formola.

90. Noi conosciamo la grossezza di metri 4,24 (19) della nostra Cupola alla chiave, dunque il valore di z bisogna che fatto

$$x = 0 \text{ dia } z = 4{,}24$$

essendo la gravità specifica

$$G = 1522$$

abbiamo la spinta alla chiave

$$S = 482202$$

e la predetta formola diverrà

$$z = \frac{12405}{\left(-\frac{\Delta}{2} + \sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2}\right)\left(D - x + f\sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2}\right)^2}.$$

Per $x = 0$, $= 6{,}46$, $= 12{,}92$, $= 19{,}38$, $= 25{,}86$
i valori di z sono rispettivamente

4,24 ; 2,00 ; 1,50 ; 2,20 ; 3,00.

91. Non faccia maraviglia se la formola ci dà le grossezze secondo questa legge, avvegnacchè esse sieguono la proporzione delle spinte, che come vedremo diminuiscono fino ad avere un valore minimo, e quindi crescono di nuovo: il valore di x poi, che dà la grossezza minima, sarà dato dall' equazione

$$-d.\frac{\left(-\frac{\Delta}{2} + \sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2}\right)\left(D - x + f\sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2}\right)^2}{dx} = 0$$

che dà $x = 9.$

92. Alle ascisse x (90) i valori effettivi di z sono per ordine

4,24 : 3,90 : 3,60 : 3,40 : 3,12

che paragonati con quelli teorici vediamo che soddisfano con bastante approssimazione alla condizione d'equilibrio; dal che siamo lieti di conoscere, come a tanto monumento non manca la prima e più forte prerogativa pel suo equilibrio; nè vale l' ob-

biezione che le grossezze teoriche essendo state dedotte dall' ipotesi che la forza risultante della spinta alla chiave con il peso dell'unghia sia perpendicolare ai letti de' cunei che formano l'unghia stessa, non valgano al nostro caso; al che basta riflettere che essendo la Cupola nostra tutta massiccia, possiamo immaginare che sia divisa in cunei che abbiano tal direzione che la predetta risultante sia costantemente normale ai letti dei medesimi.

93. Le forze che agiscono sulla nostra Cupola, altre tendono a spezzare la medesima di guisa da far prendere alle sue parti un moto orizzontale, e queste sono le spinte: altre tendono ad aprirla verticalmente, e queste sono le tenzioni: adunque queste forze tendono alla caduta della Cupola, e ad entrambe la Cupola agendo in se medesima vi resiste con la sua resistenza *respettiva*, e con la sua resistenza *assoluta*; e mentre da per se tende alla sua distruzione, in pari tempo cospira alla sua esistenza e durata. La Cupola vivrà più o meno lungamente, quanto più o meno le forze che resistono superano le contrarie.

94. Per calcolare l'effettiva spinta orizzontale della Cupola in tutti i suoi punti, ci possiamo servire della condizione d'equilibrio che contiene questo elemento che è (79)

$$S = P\,\frac{F'(x) - f}{1 + f\,F'(x)} = P\,\frac{D - x - f\sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2}}{\sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2} + f(D - x)}$$

P essendo il peso d'un' unghia con il corrispondente peso del Cupolino. Questa funzione di S poichè è una funzione della ascissa x asse della Cupola, è atta a darci la spinta orizzontale per tutti i punti della medesima: dividendo adunque la Cupola in numero 133,07 di unghie, avremo il peso (50) di ciascun' unghia con la sua parte addizionale del Cupolino (77) dall' uguaglianza $P = \int Y\,d\,y + Q = 138324,88$

compresovi la quota del peso de' cerchi che è di chil. 41638,47

(57,59), e la predetta equazione delle spinte diverrà

$$S = 179963,35 \frac{D - x - f\sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2}}{\sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2} + f(D - x)}.$$

95. Questa espressione fa conoscere che facendo prendere ad x tutti i successivi valori da zero fino a 25,86 (22), và dallo stato positivo al negativo passando per lo zero; onde si rileva esservi un parallelo nel quale la spinta è zero, il qual parallelo è determinato dal valore dell' ascissa x tratto dall'equazione

$$D - x - f\sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2} = 0$$

la quale si verifica per i due valori di x

$$x = 9 \ , \ x = 42,60$$

il primo ci dice; il parallelo della nostra Cupola nel quale la spinta è nulla, dista dall' occhio della medesima di metri 9: il secondo poi ci dice, che se la Cupola si ristringesse in se stessa dopo il suo parallelo massimo per generarne un' altra Cupola simile, che fosse sostenuta sopra il Tamburo dall' occhio inferiore, si arriverebbe ad un' altro parallelo dove la spinta è ugualmente nulla, del medesimo raggio del superiore, e disterebbe dall' occhio superiore di metri 42,60; ossia metri 9 dall' occhio inferiore. Dunque tutti i paralleli compresi dalle ascisse

$$x = 0 \ , \ x = 9$$

hanno una spinta contraria a quelli che son compresi dalle ascisse $x = 9 \ , \ x = 25,86$

le prime si esercitano dall' infuori all' indentro verso l'asse, le seconde si effettuano in senso contrario, cioè dall' indentro all' infuori.

96. Facendo adunque nella espressione delle spinte effettive $x = 0 : = 6,40 : = 9,00 : = 12,90 : = 19,30 : = 25,86$ avremo i corrispondenti valori di S che appartengono ai paral-

leli determinati da quelle ascisse, che rispettivamente sono i seguenti

$$28794,14 : 23395,23 : 0,00 : -32393,40$$
$$-86382,40 : -152968,84.$$

97. Noi non possiamo calcolare la resistenza rispettiva che la Cupola oppone a queste spinte relativamente per ciascuna di esse, perchè non abbiamo esperienze all' uopo, e d' altronde troppo incerte e variabilissime riescirebbero, e inutili al nostro caso; ma possiamo trar partito dalla formola della scala delle grossezze dedotta dall' ipotesi che la risultante delle forze che agiscono in un' unghia cada perpendicolare ai letti de' cunei della medesima; e poichè in quell' espressione l'elemento S è funzione di x possiamo calcolare la spinta teorica per ogni punto della medesima; e la scala di queste spinte paragonata con la ottenuta (96) darà a conoscere la stabilità della Cupola relativamente a queste forze.

98. La formola che ci dà la scala delle spinte teoriche, che potrebbe soffrire la Cupola sarà

$$S = z\left(D - x - f\sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2}\right)^2\left(-\frac{\Delta}{2} + \sqrt{\Delta^2 + 2Dx - x^2}\right) 39.$$

In questa equazione posto successivamente in luogo di x i valori dati (90), in luogo di z le grossezze effettive che corrispondono a quell' ascisse, avremo ordinatamente le spinte come sieguono

$$212170,31 : 60898,50 : 173873,70 : 441160,20$$
$$1106472,50.$$

99. Gli ottenuti valori di S fanno conoscere che ammettono un minimo, il quale dipende dalla medesima equazione che ci faceva conoscere il parallelo che soffre una spinta effettiva zero (95): però la spinta minima teorica è data dall' ascisse

$$x = 9 \ , \ x = 42,60$$

che è zero, ed in quei medesimi paralleli delle spinte reali.

100. Questi valori delle spinte teoriche si presentano tutti positivi, pure in atto pratico altri sono positivi, altri negativi (96); dalla formola teorica i valori delle spinte decrescono fino a zero, poi crescono di nuovo fino ad un valore massimo che si determina dall' ascissa di quel parallelo che insiste sopra il Tamburo: da questo procedere del valore delle spinte, e del grado di curvatura della Cupola, e sua posizione, non può a meno che le spinte decrescenti non decrescono in senso contrario a quelle che crescono: l' unghia della Cupola puossi considerare come una trave che s'appoggia con un estremo su d' un piano orizzontale, fermata da un' ostacolo che le impedisca di strisciar lungo il piano: onde i due punti su i quali posa la trave sono spinti orizzontalmente in direzioni opposte (*). Così adunque deve essere della nostra unghia, e la differenza fra le spinte teoriche e le effettive sono ordinatamente a cominciare dall' occhio della Cupola

183376,17 : 36503,27 : 141480,30 : 354777,80
953503,66

le quali ci fanno conoscere che relativamente alla natura di queste forze l'equilibrio della Cupola è sicuro, e stabile.

101. Per l'investigazione della effettiva tensione orizzontale in ogni singolo punto della nostra Cupola, basterà di considerare i paralleli determinati dall'ascisse (96), per i quali conosciamo le rispettive spinte effettive, e teoriche.

102. S'immagini adunque un poligono funicolare regolare equilibrato; e a ciascun de' suoi vertici sia applicata una forza eguale in tutti, la cui direzione sia tale che faccia angoli eguali con i lati del poligono stesso, e s'immagini che queste forze agiscono dall' indentro all' infuori tendendo ad allontanare tra loro

(*) Venturoli, Mec. Vol. I. Lib. I

i vertici stessi: i lati del poligono si suppongono formati di fili o corde incapaci d'allungarsi. È ben chiaro che in questo caso tutto il poligono è ugualmente teso, perchè non vi ha ragione che un lato sia più o meno teso dell'altro. Sia nella Fig. 3.ª (Tav. 2.ª) rappresentato il poligono R B inscritto al cerchio B Q F R; rappresenti P Q una delle forze uguali applicate ai vertici del poligono predetto, questa forza sia decomposta nelle due Q A , Q A′, la prima rappresenterà la tenzione del lato F Q, la seconda quella del lato Q B, e sarà

$$Q\,A = Q\,A'$$

Immaginiamo che la direzione della forza P Q sia prolungata al centro del cerchio circoscritto, e condotti i raggi ai punti Q , B si formerà un triangolo isoscele Q O B simile all'isoscele P Q A, ed avremo la proporzione

$$P\,Q : Q\,A = Q\,B : Q\,O$$

cioè la forza alla tensione del poligono come il lato di esso al raggio di quel circolo: chiamiamo X il valore della forza applicata a ciascun vertice, T la tensione del poligono, x il lato del medesimo, ed y il raggio del cerchio circoscritto, avremo

$$T = X\,\frac{x}{y}\,.$$

103. Per applicare questa formola alla ricerca della tensione dei nostri paralleli proposti, è d'uopo conoscere per ciascuno di essi le quantità X , x; le X sono state calcolate (96); le x sono corde che sottendono un'arco circolare di $\frac{360^0}{133,07}$ del raggio y, che adunque saranno date dall'equazione

$$x = 2\,y \text{ sen. } 2^0\,,\,42'\,,\,19'' = 0,0944\,y$$

con che l'espressione della tensione sarà semplicemente

$$T = X\,0,0944$$

quindi il valore della tensione dei nostri paralleli presi ad esame, saranno espresse rispettivamente come sieguono

2706,64 : 2199,13 : — 3044,94 : — 8119,90
— 14378,99.

Quelle affette del segno positivo tendono a restringere la Cupola in sè stessa comprimendola; essa vi resiste con la sua resistenza alla *compressione*; quelle affette del segno negativo tendono a dilatarla, e a dividerla in spicchi, ed essa vi resiste con la sua resistenza assoluta.

104. Noi ancor qui non abbiamo corredo d'esperienze per poter calcolare la forza *assoluta* della Cupola da punto a punto, con cui essa resiste alle trovate tensioni; ma possiamo far capitale delle spinte teoriche (98) per conoscere fino a che grado di tensione la Cupola è capace di resistere, le quali tensioni teoriche si ottengono col moltiplicare quelle spinte pel coefficiente 0,0944 (103) e rispettivamente sono per i predetti paralleli

19943,98 : 5724,41 : 13344,06 : 41469,04
104008,36.

105. Il confronto fra queste forze e le effettive (103) fa conoscere che la Cupola resiste alle effettive tensioni con forze le quali si desidererebbero ragionevolmente che fossero maggiori, specialmente verso il Tamburo ove le differenze sono più piccole. Perchè quella resistenza della Cupola dovendo far fronte ad una azione continuata si richiederebbe una più assai e valida resistenza sopra quella contraria.

106. Finalmente veniamo alla spinta che si esercita sopra il Tamburo; questa è stata da noi determinata (96) nell'ipotesi però che la Cupola fosse divisa in tanti spicchi quante volte l'unità entra nel suo parallelo massimo che posa sopra il Tamburo; ma siccome questo è esternamente difeso da contrafforti parallelepipedi eguali ed equidistanti, ed essendo di numero se-

dici, giova dividere la cupola in altrettanti spicchi. Condotto un piano verticale per la sezione di mezzo del contrafforte, cadrà su questo piano il centro di gravità del solido resistente, e la direzione della spinta. Dividendo adunque la Cupola in sedici spicchi il peso di ciascuno sarà espresso da chil. 1149825,43 con l'equazione delle spinte (94) troveremo la risultante della spinta che quest' unghia esercita sopra il Tamburo espressa da chil. — 919860,34. A questa spinta vi si oppone l'altra in senso contrario dell' unghia opposta, e così di tutte le altre: le quali si esercitano a produrre una tensione orizzontale all' estremità superiore del Tamburo, la quale sarà data dalla formola (102)

$$T = 919860,34 \frac{x}{y}$$

ed x sarà espresso da

$$x = 2\ y \text{ sen. } 22^0, 30' = 0,7654\ y$$

onde

$$T = 699093,60.$$

È questa la forza effettiva che agisce sopra la sedicesima parte del Tamburo e tende a distrarlo. La sedicesima parte del peso del Tamburo è di chil. (50)

$$\frac{16291065,37}{16} = 1018191,58.$$

La sedicesima parte del peso dei contrafforti è

$$\frac{4526968,08}{16} = 282935,50.$$

La sedicesima parte del peso della base, ossia dei due sovrapposti zoccoloni circolari è

$$\frac{16994640,90}{16} = 1062165,05.$$

107. Egli è chiaro che il piedritto non potrà tutto spostarsi se non che, o per moto progressivo dall' indentro all' infuori, o per moto di traslazione per lo stesso verso. Troviamo il mo-

mento della spinta, e della resistenza relativamente al moto rotatorio. La spinta orizzontale col momento

$$699093,60\ (4,52 + 3,57 + 14,85 + 5,75)$$

tende a rovesciare quella porzione del Tamburo che è la sedicesima parte, dall' indentro all' infuori; essendo 4,52 l'altezza del primo zoccolone circolare; 3,57 quella del secondo; 14,85 l'altezza del contrafforte, o del Tamburo; 5,75 quella dell' ordine attico (19). Resiste a questo sforzo la spinta verticale dell' unghia che è uguale al peso della medesima col momento

$$1149825,43\left(5,57 + \frac{3,12}{2}\right)$$

essendo 3,12 la grossezza del Tamburo, 5,57 quella del contrafforte (19); ed il peso di tutto il piedritto con i momenti

$$1018191,58\left(\frac{3,12}{2} + 5,57\right);\ 282935,5\ .\ \frac{5,57}{2}$$

$$1062165,05\ .\ \frac{8,49}{2}$$

8,49 essendo la grossezza de' due sovrapposti zoccoloni (19).

108. Adunque la forza spingente sarà espressa da

$$19994076,96$$

ed il complessivo delle forze resistenti da

$$20268218,85.$$

La forza che tende a far prendere al piedritto il moto progressivo è espressa da 699093,60

e quella che vi resiste, da

$$3513117,56.$$

Dal che si vede verificata la condizione che il piedritto non possa prendere moto, nè rotatorio, nè progressivo; nel primo caso l'eccesso di forza è 274141,89

nel secondo è 2814023,96.

E l'equilibrio è di più avvalorato dalla tenacità del cemento con

cui quel solido è avvinto alla sua base, e alle sue parti laterali, che per conseguenza queste forze soddisfano assai bene alla condizione d'uno stabile equilibrio.

109. Venendo ora a parlare delle cause produttrici le lesioni, ricorderemo che le effettive grossezze della Cupola da punto a punto convengono con le chieste dalla natura per l'equilibrio della medesima; inoltre avendo analizzata e calcolata la natura delle diverse forze che agiscono nella gran Volta e suo Tamburo abbiamo veduto che tendono esse ad opporsi alla distruzione dell' edificio e favorire la conservazione d'uno stabile e permanente equilibrio. Dal che adunque si rileva che le cause che han prodotto tante fenditure alla Cupola e suo Tamburo non sono punto statiche. Ed in vero se una qualche lesione fosse avvenuta per la maggioranza di qualche forza spingente sopra la resistente, vinto quel primo sforzo quella forza avrebbe dovuto agire sempre più e più imperiosamente fino alla distruzione dell' edificio: una conferma di ciò, e della buona costituzione della Cupola, l'abbiamo in un certo modo dalle scoperte rotture del cerchio di ferro (58) che cinge l'interna Cupola presso al principio del suo nascimento, che avrebbe dovuta rovinare certamente se quelle rotture fossero provenute da cause statiche, e se la Cupola non fosse ben condizionata pel suo stabile equilibrio.

110. Le cause adunque produttrici le lesioni nella gran Cupola Vaticana non ponno essere che fisiche, le quali noi divideremo in due classi, le prime interne inerenti alla Cupola stessa, che dipendono dalla natura della materiale costruzione, e dalla natura dei materiali che la compongono: le seconde esterne, e dipendono dai terramoti, e dalle intemperie atmosferiche: fra le prime enumereremo principalmente, 1° l'abbassamento ineguale del suolo su cui sono stabiliti i fondamenti dei

quattro gran Piloni che sostengono la Cupola; 2° la natura dei materiali adoperati; 3° il miscuglio delle diverse specie di costruzioni adoperate nell' esecuzione; 4° l'enorme peso di tutta la mole: fra le seconde cause enumereremo, 1° i terramoti, 2° la percossa dei fulmini, 3° il caldo ed il secco, 4° il freddo e l'umidità. Potendo tutte queste cause che han prodotte le lesioni agire contemporaneamente, se n' è ottenuta una che è come la risultante di tutte, della quale è ben difficile di assegnar la direzione e la intensità; ma però essendo le une incomparabilmente più forti dell' altre, così vedremo che molte lesioni sono di tal indole che sieguono le cause più energiche.

111. L' abbassamento del suolo ove furono fondati i quattro gran Piloni, è avvenuto dal non aver usato tutte quelle avvertenze e precauzioni che la natura del medesimo addimandavano per riguardo alla gran fabbrica; poichè essendo ivi la vallata del monte Vaticano, tutte le acque che da ésso derivano si uniscono sotterra in quella specie di bacino, però una delle principali avvertenze era d' impedire che le acque penetrassero sotto i fondamenti dei Piloni, onde non facessero guasto alla murazione, e rendere il terreno suscettibile d'essere più compresso dall' enorme peso dell' edificio. Generalmente parlando si sà dalla storia (*) che fino dai tempi antichi i sotterranei del Tempio Vaticano sono stati soggetti all' infestazione dell' acqua, o calata dai monti vicini, o dalle fonti disperse, o pure dal Tevere. Al presente sentiamo che vi siano sotto la Chiesa di S. Pietro almeno tre gran pozzi d'acqua. Ancora altra importante precauzione sarebbe stata lo stabilire sopra il fondo ben consolidato un muro massiccio generale, il che comprendesse i quattro gran Piloni, meno un foro circolare nel mezzo per vantaggio d' economia;

(*) Bonanni cap. 23. — Carlo Fontana lib. 4. e 5.

che invece il Bramante anzichè fare una platea generale scandagliò separatamente il fondo di ciascun Pilone, e vi fondò il medesimo. Dall' esser lasciate queste principali ed essenzialissime precauzioni n' è venuto l'abbassamento dei Piloni di S. Andrea e di S. Veronica, si sono manifestate le lesioni negli archi principali, per la poca accuratezza con che furono eseguiti i lavori. Noi avvertimmo (10, 12) che dopo la morte di Bramante altri architetti fortificarono di nuovo i quattro gran Piloni che avevano a sorreggere la Cupola, e si fecero a procurare tutta quella stabilità che era possibile d'ottenere dopo la costruzione d'un opera mal condizionata. Ma sfortunatamente tutte le precauzioni loro non hanno potuto impedire nuovi abbassamenti; ed infatti come ci attestano le lesioni orizzontali manifestatesi sopra i nuovi archi e rinforzi costrutti aderentemente nei Piloni di Bramante.

112. La natura de' materiali è soggetta ad alterarsi, e produrre accidenti capaci di compromettere la stabilità d'una fabbrica. Qualunque opinione vogliamo considerare dell' origine delle pietre vive, sempre resteremo persuasi che tolte dalle loro cave, e quindi esposte all' intemperie atmosferiche, possono contraere qualche mutazione a discapito della loro stabilità, e dei perenni requisiti architettonici che si richiedono in esse, onde la fabbrica alla quale vengono adoperate non abbia a soffrire con discapito della sua stabilità. La pietra Tiburtina essendo formata di varie sostanze è probabile che nei diversi pezzi vi sia qualche diversità di consistenza, e che coll' andar del tempo qual più, qual meno resistono all' intemperie atmosferiche. Così pure può accadere ai mattoni, non di rado impastati di varie terre, e di varia cottura. I cementi ancora ponno andar soggetti alle medesime alterazioni, i quali benchè siano composti di materie simili, è difficile però che sieno eguali in qualità, in perfezione, e nel rapporto della loro proporzione degli elementi de' quali sono

composti. Dal che dobbiamo concludere che la natura de' materiali può produrre screpoli e lesioni, e quindi influire al deterioramento dell' edificio.

113. La pessima materiale costruzione specialmente del Tamburo (15) con la quale si deturparono le più sane regole della Stereotomia, e dell' Architettura; ed il miscuglio delle diverse specie di costruzioni adoperate, hanno non poco contribuito a lesionare il nostro gran monumento; ed infatti i tagli eseguiti sui massi di pietra, doveano essere stabiliti sotto condizioni meccaniche e geometriche, e non senza regole. I gravi patimenti avvenuti ai Piloni che sorreggono la Cupola del Tempio di S. Genoeffa, per cui si dubitò della sussistenza d'uno fra i più celebri monumenti della capitale della Francia, e fece concepire la total rinnovazione de' medesimi Piloni, non ad altro si poterono attribuire che ai multiplici sconci derivati dalla pessima costruzione dei medesimi: e inoltre alla materiale costruzione del Tamburo, di cui una parte nella sua grossezza consta di pietra Tiburtina, e la restante è costrutta di mattoni e di pietrame. Da una tal costruzione ne siegue che il muro interno fin tanto che il cemento non siasi intieramente consolidato, può nella gran pressione del sovrapposto peso cedere più che la parte di muro di Travertino, il quale conseguentemente è ridotto allo stato di dover soffrire una specie di maggior carico, e così quella causa che vaglia ad offendere per una troppo pressione, diviene più possente per vieppiù danneggiare, e così le lesioni nascer possono con maggior facilità.

114. L' inestancabile nemico delle fabbriche è il peso delle parti superiori gravanti sulle inferiori, il quale produce assettamenti incredibili, dal che n' è nata la massima salutare di non sovrapporre muro a muro se l' inferiore non si è ben assettato, e come suol dirsi praticamente, se prima non si è l' inferiore la-

sciato *riposare*. Noi abbiamo or ora avvertito (113) che se le parti inferiori non presentano tutte uguale resistenza come avviene nel Tamburo della nostra Cupola, il peso delle parti superiori agisce più imperiosamente con evidente pericolo del ben essere della mole, e qui aggiungeremo degli effetti della resistenza delle parti inferiori, quando esse sono caricate differentemente, cioè altre di gravissimo peso, altre di minore, o nessuno. Nel caso delle differenze di questo genere, quando vi è troppa sproporzione tra le compressioni superiori, ne siegue che le più compresse inferiori cedono più di quelle altre vicine non tanto compresse. Onde per tal ineguaglianza non accompagnandosi i cedimenti, può avvenire con naturalissima facilità che da quelle stesse differenze nascono staccamenti e lesioni. Il nostro Tamburo aggravato dalla gran mole della Volta, se si paragoni con i contrafforti non aggravati dalla medesima, apparisce facilmente esser somma quella differenza di soggiacimento alle pressioni: questa sola differenza era capace di produrre sotto un tanto peso, tutti gli screpolamenti e le disunioni accadute.

115. La direzione della rottura che staccano i contrafforti dal Tamburo della Cupola, e gli screpolamenti che osservansi ad ogni lato dei medesimi, provvennero dall'abbassamento maggiore delle interne parti del Tamburo, essendo esse fabbricate di mattoni, ed in pietrame, e soggette ad un maggior peso di quelle esterne, le quali sono fabbricate in pietra da taglio; per questa costruzione viziosa i contrafforti si son trovati con due differenti appoggi, uno esteriore sopra un muro costrutto quasi tutto in pietra da taglio, e però suscettibile di poca compressione, l'altro internamente sopra un muro di mattoni e di pietrame, più fortemente aggravato e suscettibile di maggior abbassamento; che per conseguenza questa parte di muro avendo più dell'altra ceduto si è fatta nella volta del corridojo una lesione

per tutta la sua estensione; e nel medesimo modo si spiegano le lesioni avvenute negli archi dei trafori praticati inferiormente ai contrafforti. Il predetto corridojo circolare si è malamente praticato nel massiccio dello *stilobato*, che però ha facilitato queste lacerazioni.

116. Riguardo poi alla gran Volta per la troppo fretta impiegata nella materiale costruzione, le parti inferiori non ancora ben consolidate venivano caricate del gran peso delle parti superiori, onde gli assettamenti combinati con gli ineguali del Tamburo, doveano essere più e più grandi, quindi produrre tutti quei squarci che fecero tanto temere del suo ben essere. Questa è certamente la causa principale delle disunioni dell' interna Cupola, e di quelle che si osservano ne' costoloni, non che di quelle presso che orizzontali ne' medesimi costoloni: a questa causa si deve aggiungere la qualità pessima della costruzione e dei materiali. L'effetto dell' ineguale abbassamento si conosce ancora nell' altezza dei pilastri che decorano l' interno del Tamburo, e le disunioni avvenute nell' interno del Cupolino, sono conseguenze dell' abbassamento.

117. Tutte queste lesioni provano che l'avvallamento è stato più considerevole all' interno che all' esterno, e per essere le lesioni orizzontali si scorge che l'abbassamento delle costruzioni interne è stato ritenuto in parte dalle costruzioni esterne, e dalla consistenza propria ne' luoghi ove formano grandi masse. Le disunioni nell' altezza dei pilastri indicano che questa parte ha agito più liberamente perchè i finestroni che ne interrompono la continuità hanno impedito di resistere per la propria consistenza; quindi le lacerazioni de' contrafforti. Le lesioni che han dovuto farsi perchè si effettuasse il maggior abbassamento all' interno, ha spinto all' infuori i rivestimenti ed i contrafforti, quindi il loro strapiombo è più considerevole che all' interno

ove alcune parti pendono in dentro. Lo strapiombo esteriore ha eseguito l'abbassamento dei Piloni in guisa che sopra quello di S. Longino che è il meno abbassato, i contrafforti sono a piombo, e quelli che più strapiombano sono quelli sopra il Pilone di S. Veronica che è il più abbassato.

118. Difficilissimo riesce l' investigazione della causa produttrice le due rotture che furono trovate al cerchio posto in costruzione al principio del distacco della Cupola interna dalla esterna (14). Si vede chiaramente l'opera della natura, ma è ben difficile di conoscere in quali modi abbia essa operato. Si crede con probabilità che detto cerchio siasi rotto per la percossa di qualche fulmine, o più probabilmente in tempi di terremoto: la dilatazione poi delle spezzature del cerchio dubito che possa esser accaduta in un' istante fino al punto in cui si ritrova presentemente: ma più tosto a poco a poco, conforme a poco a poco si sono manifestati i danni maggiori con la dilatazione delle fessure: è dubbio ancora se il cerchio siasi spezzato nei due punti nel medesimo tempo, o in diversi tempi come è probabile dalla sua costruzione. Egli è composto di sedici pezzi i quali sono combinazioni d'occhioni uniti con palettoni, e queste parti nella loro estremità per mezzo de' detti palettoni sono conficcate e fermate dentro al sodo ed immobile corpo dell' interna Volta. Dal che adunque si vede che tutto il cerchio è diviso in sedici parti, e dalla considerazione della immobilità di queste estreme parti si comprenderà che l' impressione internamente fatta contro un' arco per romperlo, non può sforzare i due contigui, e l' impressione sofferta da un' arco si termina da' suoi occhi e palettoni che sono saldamente fissi.

119. È veramente singolare che nel sito delle scoperte rotture del cerchio non corrispondono i danni della Cupola, come ragionevolmente dovrebbe essere; nella prima scoperta rottura

nel sito dove è accaduta non vi sono che poche lesioni, le quali però nello spicchio non passano per quel piano orizzontale in cui è il cerchio rotto; nella seconda rottura scoperta prossimamente al sito ove è accaduta si notò una fessura di 0,045 metri, che passa pel piano orizzontale determinato dal rotto cerchio.

120. Qualunque questione si porti in campo per spiegare la causa delle rotture del cerchio, certo è che essa principalmente dipende dal moto dei grandi assettamenti avvenuti alla nostra Cupola e suo Tamburo, e dalla sua pessima materiale costruzione, per tal modo hanno avuto luogo più imperiosamente i gran conati orizzontali contro il cerchio, e contro tutta la Volta, provenienti dalle spinte e tensioni orizzontali fino a rompere il cerchio, e vincere la resistenza.

121. In rapporto all'inferior cerchio, niente di positivo possiamo affermare se esso sia o no rotto; perchè essendo messo nel mezzo del pieno della Volta non furono potute fare le oculari ispezioni, ma probabilmente ancor esso in qualche punto sarà rotto trovandosi nelle stesse circostanze del primo.

122. Potrebbe qui farsi la domanda; quei due cerchi posti in costruzione per garantire la Cupola, per sua maggior stabilità, sono stati di giovamento o di danno? Che che ne dica il sig. March. Poleni parmi che quei cerchi siano stati più di danno che di utile al ben essere della Cupola: ed infatti senza di essi la Cupola si sarebbe assettata poco per volta, conforme richiedeva la sua natura, e quelle forze per dir così d'assettamento venivano distrutte di mano in mano che nascevano, senza gran strepito e chiasso per la Cupola: ma a causa di quei cerchi, quelle forze non potendo smorzarsi si accumularono a spingere il cerchio fino a romperlo, e poichè quelle rotture non poteano effettuarsi che in un'istante, avveniva che in quell'istante la gran Volta era posta in moto, o tremolìo precipitoso con danno

sicuro della sua stabilità. Di vantaggio il cerchio poi sarebbe stato se avesse resistito ai conati della Cupola.

123. Nei luoghi ove la nostra fabbrica è indebolita dalle scale, hanno dovuto manifestarsi maggiori lesioni. Quindi non si può fare a meno di non dire che queste scale furono collocate con poca avvertenza. Esse anzi che esser nei massicci superiori ai Piloni della Cupola, sarebbero state meglio nei massicci che sovrastano il mezzo degli archi, perchè in quei luoghi bisognava diminuire il peso: come ancora in luogo di praticarle nei punti d'appoggio che sostengono i costoloni che tengono unite le due Cupole, si avrebbero dovute collocarle negli intervalli, onde non indebolire senza necessità le parti che sostengono, ed alleggerire quelle che non portan nulla.

124. Tutti gli effetti predetti non hanno potuto apparire che dopo un certo tempo, perchè l'ineguale abbassamento che è la causa principale, si è operato lentamente a cagione della forte resistenza opposta dalla rigidezza delle parti in pietra di taglio, le quali hanno cominciato a cedere quando lo sforzo è divenuto considerevole, quindi di mano in mano che tutto l'edificio veniva ad assettarsi gli screpoli doveano necessariamente diminuire, fino a giungere ad uno stato stazionario, dopo il quale altre lesioni non poteano avvenire che per casi fortuiti. Del rimanente che l'assettamento alla nostra Cupola sia eseguito in un tempo molto lungo, come ancora accade in una volta qualunque, si potrebbe provare con molti esempi, ma noi ne riporteremo uno solo. Quando il P. Pozzi dipinse la volta della chiesa di S. Ignazio in Roma, che fu cominciata dal Cardinal Ludovisi nell'anno 1626, non v'era la crepatura sopra l'altar maggiore altrimenti l'avrebbe ben stuccata; e quella crepatura apparsa in appresso, a giudicio degli Architetti, è effetto dell'assettamento della volta.

125. Tutte le cause delle quali abbiamo parlato fin qui sono certamente le principali che hanno prodotte le lesioni alla Cupola Vaticana; ciò non ostante le cause esterne quali noi abbiamo numerate (110) vi hanno influito, e tal volta ancora imperiosamente a seconda della loro intensità. I terramoti principalmente son tali che fanno nascere maravigliosi tristissimi effetti alle fabbriche, in alcuni casi violenti, in più città rimaste sono dalle tremende scosse tutti gli edifici diroccati, e distrutti. Ed in tali casi di scuotimenti della terra, sono più che le basse fabbriche, le alte soggette al pericolo del danno. Succede nelle alte fabbriche uno scuotimento il quale è una specie d' inversa oscillazione, come il moto degli alberi delle navi: questo paragone fa conoscere quanto il pericolo de' danni negli alti edificii sia maggiore che nelle basse fabbriche, se l'agitazione della terra gli scuote. Quanto adunque non devesi temere di questo fenomeno per la stabilità della nostra Cupola lanciata a tanta altezza? Questo fenomeno ora è il più tristo nemico che abbia la Cupola, mentre se in una fabbrica vi produce un certo effetto, alla nostra in pari circostanze vi produce un' effetto molto maggiore e più forte. Un terramoto assai gagliardo si fece sentire in Roma nel principio del 1700, del che è cosa notissima. Le memorie anteriori al detto terramoto dello stato della Cupola non danno indizio de' forti risentimenti; ma dopo tal terramoto i danni della Cupola si presentarono come danni di grandissima considerazione. Forse le rotture che furono scoperte nel cerchio potrebbero essere state prodotte da qualche scossa di terremoto.

126. Tristissimi esempi dimostrano quanto possente sia la forza della percossa del fulmine nel penetrare, nello squarciare, nel rompere i materiali de' grandi edificii, nè fa d'uopo d'aggiungere che le alte fabbriche soggiacciono molto al pericolo delle percosse de' medesimi: ciò troppo è noto non solo agli Ar-

chitetti, ed a Filosofi; ma agli Oratori ancora, ed ai Poeti, che sogliono addur sovente questa proprietà de' fulmini per indicare i pericoli d'una grande fortuna, cantando come gli alti pini sono più facilmente percossi che gli umili virgulti. E nella nostra Cupola quante lesioni non derivarono dal potente loro urto? Il Baldinucci (*) narra che ai tempi di Bernini, un fulmine cadde sopra il Cupolino, mosse quattro colonne del medesimo, e gettò a terra due dei capitelli Ionici, e vi produsse delle lesioni. Queste ed altre lesioni furono che mossero la munificenza della sa. me. di Papa Pio VII ad innalzare de' condottori elettrici che ora si ammirano a fine di salvare la gran Cupola dal non infrequente cader de' fulmini; e così resta eliminata tanta causa per il ben essere della Cupola. È probabile che la forza di qualche percossa di fulmine abbia potuto ancora rompere il nostro cerchio, anzi perchè in una delle rotture non v'è relazione tra esse e quelle della Cupola, potrebbe essere che questa rottura fosse avvenuta dalla caduta di qualche fulmine, portando la natura del fulmine d'agire in certe parti, senza che le contigue restano punto intaccate; il fulmine poi non solo si contenta di rompere i metalli, ma ancora li liquefà.

127. In riguardo al calore, è fuor di dubbio per tanti esperimenti che le pietre vive, e le pietre cotte, poste all' azione del calore si rarefanno, le prime più, le seconde meno; ma quando quest' effetto non può per la stretta combinazione de' materiali liberamente effettuarsi, avviene che nella parte ove più agisce, succedono fenditure e lesioni. Ben è vero che ne' nostri casi il calore poco penetra, e che ne' nostri materiali l'effetto del calore non può essere che piccolissimo; non ostante non abbiamo voluto lasciare anco questa considerazione. Il caldo inoltre

(*) Vita del Cav. Bernini.

asciuga e dissecca; donde sieguono le restrizioni de' materiali, e in special modo ne' cementi nuovi. Da tali restrizioni diverse ponno nascere principii di lesioni, od anche di lesioni reali.

128. Se i corpi pel calore si rarefanno possono anche da qualche violenta forza del freddo essere condensati; vero è che pel nostro caso possiamo supporre che le pietre non si condensano se non per moto insensibile: ma è poi naturale che i cementi per la loro porosità possono condensarsi alquanto di più. Ma però lesioni e fessure ponno più facilmente esser prodotte dal giaccio allorquando quelle porzioncelle di umido che esistono ne' travertini, ne' mattoni, e ne' cementi si gelano. Ancora questa avvertenza non dovevamo lasciare per mettere sempre più in miglior lume le cause delle lesioni. Il freddo potrebbe esser causa delle scoperte rotture del cerchio di ferro; ed infatti molti esempi si hanno di gran verghe di ferro poste per legature d'archi di pietra a fine d' impedire che non si allargano, queste legature da grandissimi freddi troppo contratte, cessati i freddi furono trovate rotte, e questo potrebbe venir facilitato da alcune fibbre del ferro in una qualche sezione del cerchio, che di lor natura si rompono più facilmente nel freddo.

129. Le verghe di ferro sono adunque soggette ad allungarsi, e ad accorciarsi a seconda che si alza, o si abbassa la temperatura dell' ambiente in cui giacciono. La variazione di lunghezza in più o in meno, alzandosi o abbassandosi la temperatura d'un grado del termometro di Reamur, dietro i risultati delle sperienze de' Fisici, specialmente di De-La-Hire, può stabilirsi nel ferro di fucina, come quello de' nostri cerchi di 0,0000135. Ora la dilatazione delle cinture della nostra Cupola, potrebbe generare qualche rilasciamento nelle parti allacciate: e da un' altro lato lo stimolo alla contrazione aggiunto alle spinte della Cupola potrebbe vincere la tenacità di questi

ritegni e strapparli. Quindi a ragione si è temuto che le variazioni prodotte dal caldo e dal freddo nei cerchi di ritegno, possono cagionare qualche sconcerto nella Cupola. Nel nostro clima la temperatura massima è di circa 34 gradi, il massimo allungamento, ed il massimo accorciamento che nei nostri cerchi ponno accadere, non oltrepasseranno il limite di

$$0{,}0000135 \times 34 = 0{,}000459$$

vale a dire che essendo i nostri cerchi dell' estensione lineare di metri 133, la variazione in più o in meno non potrà esser maggiore di metri 0,061, che sebbene non è grande, pure questa dilatazione combinata con lo sforzo prodotto dalla Cupola può aver facilitato le rotture.

130. Dal detto fin qui risulta che le cause principali di tutti gli effetti che si sono manifestati nella Cupola Vaticana, le principali sono, gli abbassamenti ineguali tanto del suolo, quanto di quelli avvenuti dal cattivo genere di costruzione che si è adottato; la disposizione viziosa del gran corridojo circolare praticato nella sottobase, e delle quattro scale del Tamburo; i terremoti; le percosse del fulmine per lo passato; e le intemperie atmosferiche che col tempo distruggono gli edificii più solidi, che agiscono con più forza sopra i più difettosi.

131. Arrivati fin qui, verremo ora a parlare dell' attuale solidità della Cupola Vaticana, e perchè essa è stata cinta con sei cerchi di ferro i quali entrano nella funzione della sua stabilità, però converrà conoscere l'energia d'un cerchio di ferro sopra la resistenza assoluta del medesimo.

132. Noi abbiamo dimostrato (102) che in un poligono funicolare regolare ed equilibrato iscritto ad un cerchio, al quale in ciascun vertice sia applicata una forza eguale in tutti, che faccia angoli eguali con i lati del poligono stesso; ciascuna forza sta alla tensione del poligono come un lato di esso al rag-

gio di quel cerchio al quale è iscritto: chiamiamo P il valore di ciascuna forza eguale applicata ai vertici del poligono, T sia la tensione di esso, R il raggio del circoscritto cerchio, finalmente sia L uno de' lati eguali del poligono, avremo

$$P : T = L : R$$

sarà quindi per le regole delle proporzioni

$$P + P + P + \ldots : T = L + L + L + \ldots : R.$$

Se supponiamo che il poligono abbia un numero infinito di lati, si confonde con il cerchio al quale è iscritto, ed il perimetro di esso poligono puossi prendere per la periferia del cerchio, ossia $2 \pi R = \Sigma . L$

$$P + P + P + \ldots = \Sigma . P$$

dal che abbiamo $\Sigma . P : T = 2 \pi : 1$.

Questa equazione ci dice che, la resistenza assoluta d'una cintura, ossia d'un cerchio di ferro, contro una forza che agisca ugualmente in tutti i suoi punti in direzione del raggio, tendente a dilatarla, e a romperla, stà alla resistenza d'una verga dritta di riquadratura eguale a quella della sprangha componente il cerchio, come la circonferenza stà al raggio. Però lo sforzo del cerchio uniformemente distribuito per tutti i punti è dato dall'equazione $\Sigma . P = 2 \pi T$.

133. Noi abbiamo osservato per mezzo dell'esperienza se la nostra formola rappresenta la vera legge della natura: abbiamo preso de' fili di varie grossezze, e di varie materie, come sarebbero di ferro, di rame, di seta, di lino ec., e ne abbiamo cimentata primieramente la resistenza *assoluta* col seguente artificio. Fermatane saldamente l'estremità d'uno de' capi ad una attaccaglia in guisa che fosse liberamente a perpendicolo; all'altra estremità si attaccava un peso, il quale progressivamente si faceva crescere, fino a rompere il filo, e si notava l'ultimo peso che rompeva il filo sottoposto all'esperienza, e come misura

della sua resistenza assoluta. Quindi di questi stessi fili, della lunghezza stessa di quelli sottoposti all' esperienza predetta, si formava un esagono, un ottagono, un decagono; ed a ciascuno degli angoli di questi poligoni si attaccava un peso, che con facile artificio si faceva che traesse dall' indentro all' infuori, ed il poligono si giaceva in positura orizzontale: i pesi sospesi ai vertici del poligono erano eguali e si aumentavano progressivamente fino che il poligono si strappasse: la somma di questi pesi era il sestuplo e qualche cosa di più della forza assoluta di quello stesso filo: e quanto più il poligono era di un maggior numero di lati tanto più il sestuplo della forza assoluta cresceva; l'analogia ci porta a conchiudere che di qualunque materia fossero stati quei fili, e sottoposti quindi all' esperimento avremmo avuto sempre la medesima legge conforme alla teoria, cosicchè volendo conoscere la resistenza assoluta di una cintura, basterà moltiplicare la sua resistenza assoluta nell' ipotesi che fosse dritta per 2π.

134. La resistenza assoluta, ossia la tenacità per cui le fibbre d'una sprangha di ferro resistono ad una forza che tende direttamente a strapparle, è di chil. 44,50 per ogni millimetro quadrato dell' area della sezione perpendicolare alla direzione della forza distraente. Questo valore è un medio fra le molte sperienze registrate dal Navier, compresovi quelle istituite da noi (133). Questa resistenza assoluta del ferro non può valere per un' azione costante e di lunga durata, come è nel nostro caso, che un settimo, o al più un sesto del medio valore primordiale; vale a dire che pel ferro lavorato in verghe non può valutarsi che di 6, o di 7 chil. al più per ciascun millimetro quadrato della sezione. Le cinture come abbiam detto sono composte di spranghe grosse metri 0,056, larghe metri 0,093. E valutando la tenacità della sprangha di chil. 6 per millimetro

quadrato, la resistenza dei nostri cerchioni risulta eguale a chil. 196336. Il paragone fra la tensione de' cerchi, e quella della Cupola mostra quanto giudiziosamente furono posti per assicurare la sua stabilità. E lode però dobbiamo dare al Poleni che con le sue cinture rese la Cupola Vaticana più stabile, e nel medesimo tempo l' ha liberata da tante altre lesioni che sarebbero avvenute senza quei freni.

135. Con questi dati, con la cognizione dell' effettive grossezze, e con quelle chieste dalla natura; con la conoscenza che ci siam formati delle spinte orizzontali, e delle rispettive resistenze; delle tensioni, e sue resistenze; della spinta sopra il Tamburo, e sua resistenza rispettiva: possiamo dare un verosimile giudizio dell' attuale stato di solidità della Cupola Vaticana, giudizio per vero dire oltremodo difficile, e superiore alle nostre forze.

136. Tutte le Cupole, Volte, ed Archi, più o meno patiscono fenditure e lesioni, come ci attestano la Cupola di S. Maria in Vallicella, quella del Gesù, di S. Carlo al Corso, di S. Andrea della Valle, di S. Agnese in Piazza Navona; quella di Monte Fiascone, quella di Firenze, e quella del Panteon: queste fessure e lesioni a giudizio de' più riputati Architetti derivano dagli assettamenti delle medesime. Ma in sostanza possono essere un vero deterioramento, che non seguirebbe se la fabbrica fosse forte. E nella Cupola Vaticana le lesioni sono un vero deperimento, benchè la gran mole sia abbastanza proporzionata alle dimensioni sue, ciò non ostante per la sua pessima materiale costruzione, essa ha in sè stessa il germe della distruzione: germe che alla nostra fabbrica produce tanto più male, quanto più è di grande ampiezza e dimensioni. Certamente la Cupola Vaticana non è dotata di quella solidità che gode la Cupola del Panteon, questa dopo tanti secoli sfida ancora im-

periosamente il tempo avvenire, mentre la Cupola Vaticana nata posteriormente pure mostra uno stato di deterioramento avvenuto dalla cattiva materiale costruzione, che mantiene e manterrà sempre il germe della sua cattiva indole per la distruzione sua, ciò non ostante la Cupola Vaticana è bastantemente solida, e se non presenta tutta quella energia di solidità che un' opera sì grande e sì magnifica richiederebbe, non dobbiamo però credere, come qualcuno ha malamente opinato con gran strepito, che possa soccombere ad ogni istante pel più piccolo motivo: anzi da tutto quello che noi abbiamo dimostrato possiamo giudicare e concludere che la Cupola Vaticana trovasi in un sufficiente stato di solidità da sfidare vittoriosamente anni e secoli, se non la turba una qualche forte scossa di terremoto.

137. Ed infatti noi abbiamo veduto che le cause produttrici le lesioni non sono punto statiche, e che tutte si devono attribuire all' ineguale assettamento della fabbrica, alla pessima materiale costruzione, alla cattiva indole dei materiali, e all' intemperie atmosferiche: che se alcune di queste cause son ora distrutte, come sarebbero la percossa dei fulmini, e l'assettamento della fabbrica; le altre però esistono sempre e portano alla Cupola sempre ulteriore danno, e concorrono ad aumentare col tempo la sua cattiva indole per la distruzione; che se sfortunatamente si aggiungesse tratto tratto qualche scossa di terremoto, avverrebbero danni grandissimi per le grandi lesioni che esistono ora, e per quelle che si manifesterebbero di nuovo. Questo germe di distruzione resosi così potente potrebbe arrecare danni sempre più grandi e crescenti da portare irreparabilmente la total rovina. Da ciò che si è detto il più crudele nemico della Cupola Vaticana è il terremoto; esso è nemico dell' esistenza di qualunque fabbrica, ma alla nostra agisce più imperiosamente,

per la sua altezza, per la sua grandezza, e per la sua cattiva indole che ha pel deterioramento.

138. Pochi rimedii radicali d'arte potrebbe arrecare alla stabilità della Cupola Vaticana, qualora imperiose circostanze li richiedessero, ma per buona avventura essa non ha bisogno dei medesimi; e per la sua stabilità e suo benessere, tutte le cure nostre debbono essere attentamente rivolte per la sua buona manutenzione: e già lodevolmente con grande premura e sapienza è tenuta e assiduamente guardata da un corpo di rispettabili Architetti.

139. Noi abbiam detto (116) che tutte le lesioni avvenute alla gran Volta e suo Tamburo, provvennero principalmente da ciò che l'abbassamento è stato più considerevole all' interno che all' esterno; le lesioni che hanno una direzione orizzontale avvenute ai costoloni che tengono unite le due falde della Cupola, provano pure che l'abbassamento delle costruzioni interne è stato ritenuto in parte dalle esterne; perlochè la falda interna a causa di questi distacchi è più caricata dell' esterna, quindi col passar del tempo, o pure per qualche violenta fortuita causa le lesioni che si manifesterebbero all' interna falda, sarebbero più sensibili di quelle che si manifesterebbero all' esterna, con discapito della stabilità della Cupola e sua durata: però credo che sia opportuno e giovevole consiglio di cingere i predetti costoloni con staffoni di ferro, i quali terrebbero più unito il sistema, ed equilibererebbero opportunamente il peso fra l' interna ed esterna falda; con ciò la Cupola risentirebbe meno tristi gli effetti di qualche fortuita violenta scossa.

140. Si desidererebbe secondo l' idea di Michelangelo, che si desse compimento e perfezione al sontuoso Tamburo della nostra Cupola, con porre sopra i sedici contrafforti esterni che fanno ancora una bella decorazione, altrettante statue le quali

farebbero un bellissimo ricorso, togliendo alla vista quell' aspro ritiro fra i medesimi e dove nasce la Cupola; le quali statue, che potrebbero rappresentare Profeti, dovrebbero coll' altezza arrivare al livello dell' arcuatura, e verrebbero a formare una vaga e nobilissima corona, e nulla comprometterebbero la stabilità che anzi verrebbe maggiormente assicurata, poichè questo peso si opporrebbe alla spinta della Cupola sul Tamburo.

141. Se coll' andar del tempo per qualunque siasi causa si manifestassero forti lesioni, sarebbe opportuno di continuare a far uso delli cerchioni di ferro della medesima grossezza e larghezza di quelli già posti in opera, però è d'avvertirsi che questi cerchi sarebbero inutili se fossero posti nelle parti superiori della Cupola fino ad una distanza di metri 9 dall' occhio della medesima, perchè in quella superiore parte la Cupola si spinge dall' infuori all' indentro, e nelle parti inferiori poi sarebbero utili perchè in esse la spinta si esercita dall' indentro all' infuori: per lo che non possiamo approvare il cerchio di ferro che cinge l'occhio della Cupola, nè qualunque altro che si volesse porre in quella parte superiore.

IMPR. — Fr. J. D. Boeri S. P. A. Mag. Soc.
IMPR. — J. Canali Patr. Constantinop. Vicesg.

Fig. 1.

Fig. 2.

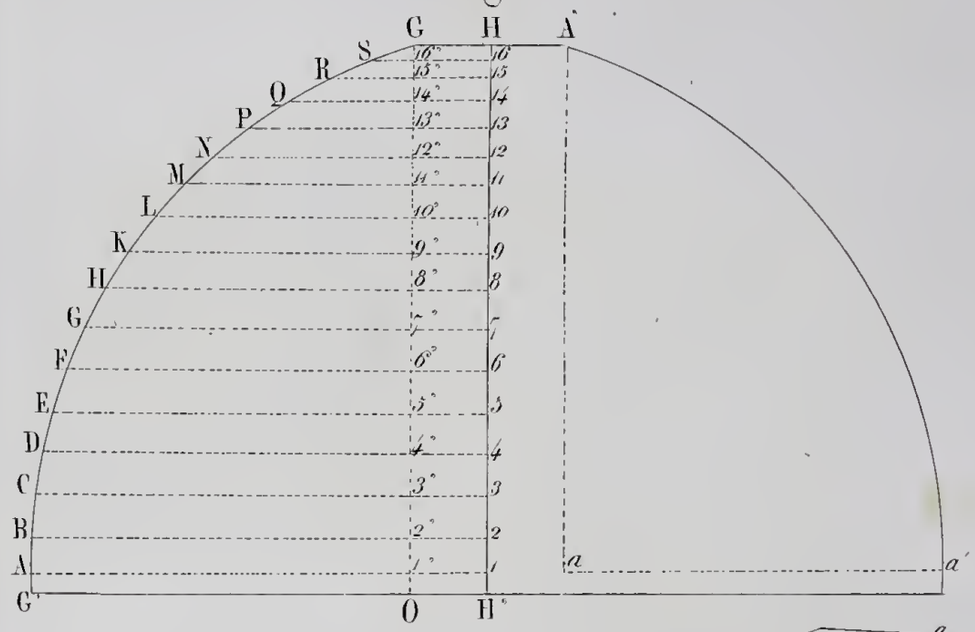


Fig. 3.

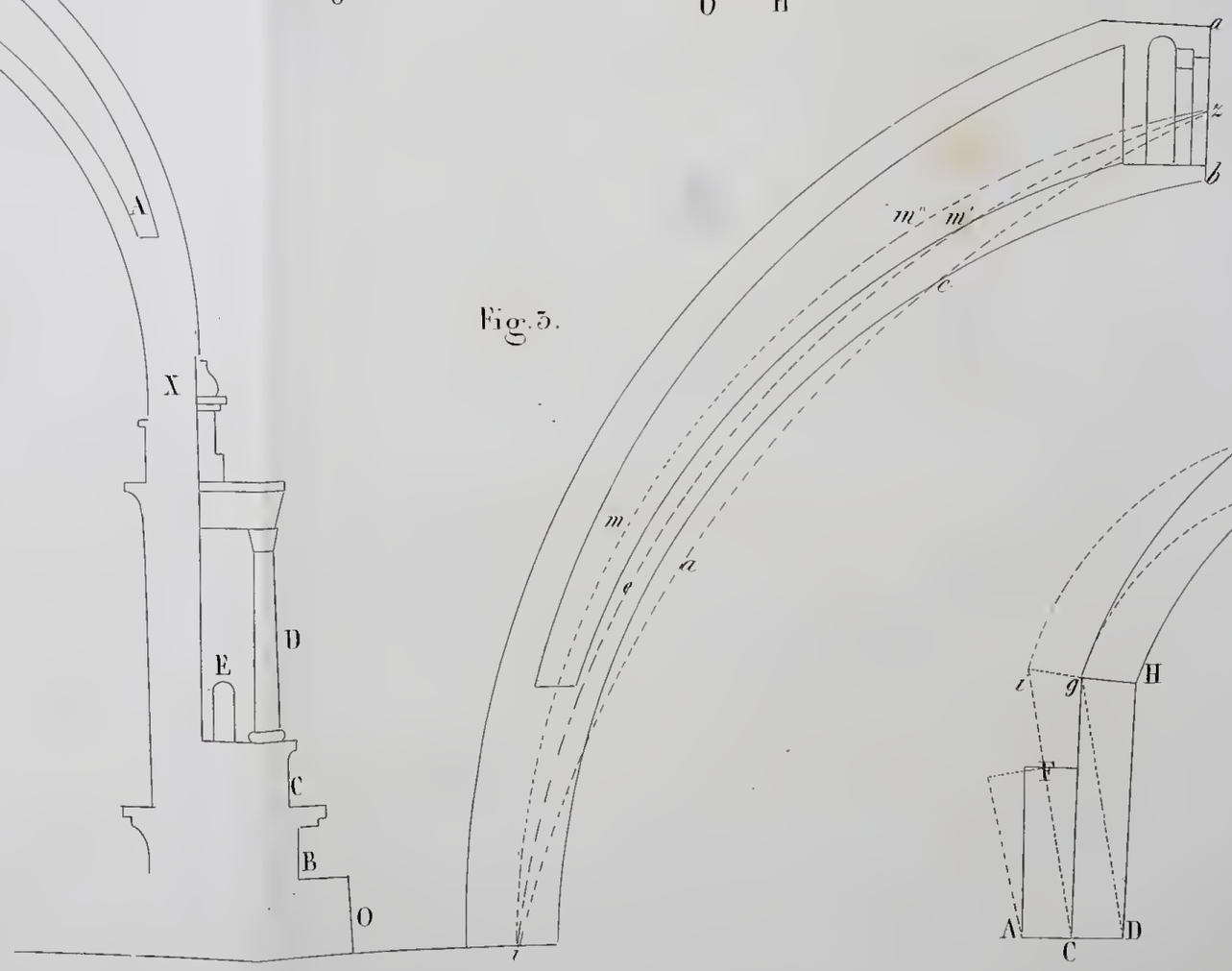


Fig. 4.

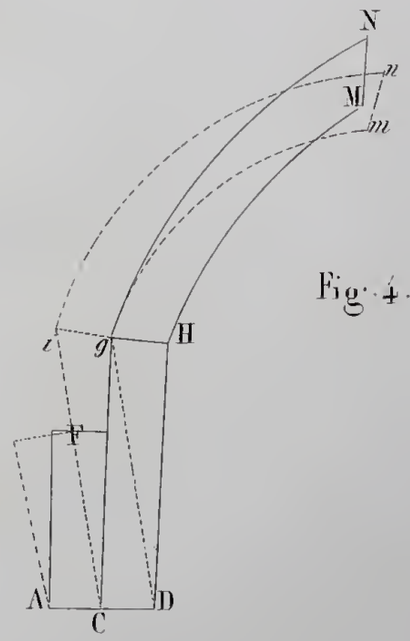


Fig. 1.

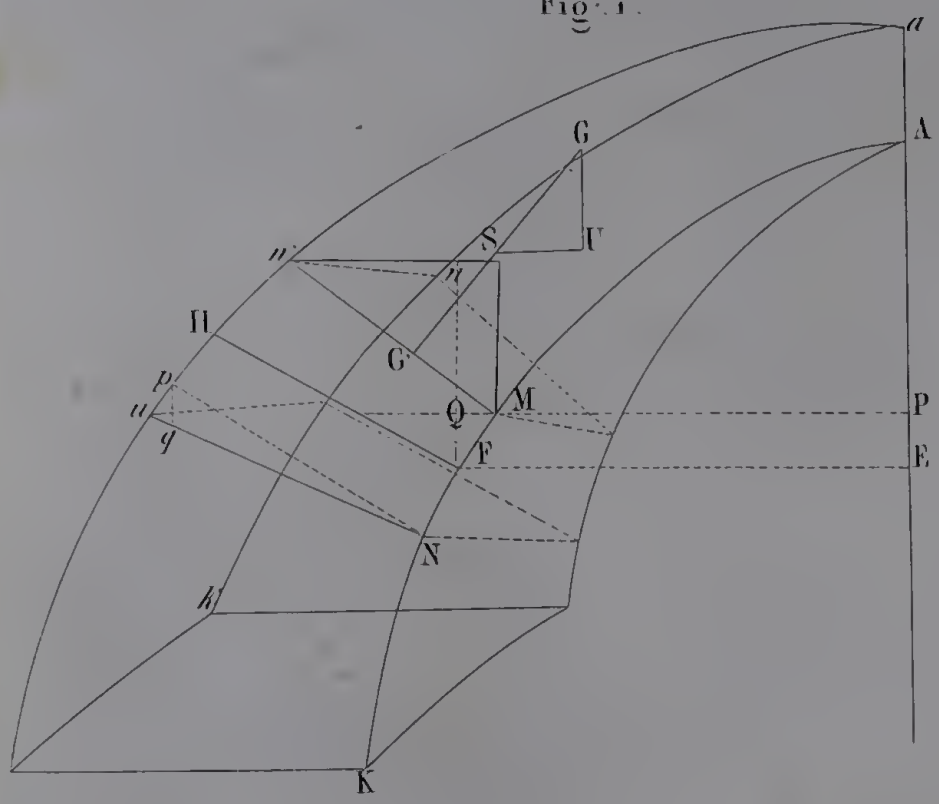


Fig. 2.

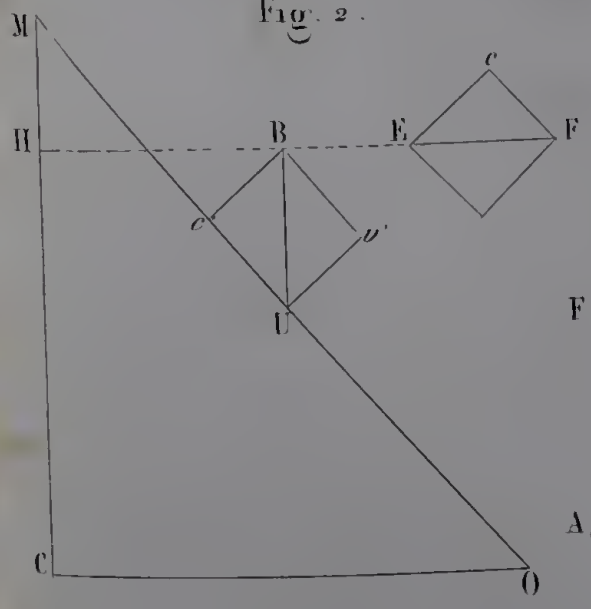
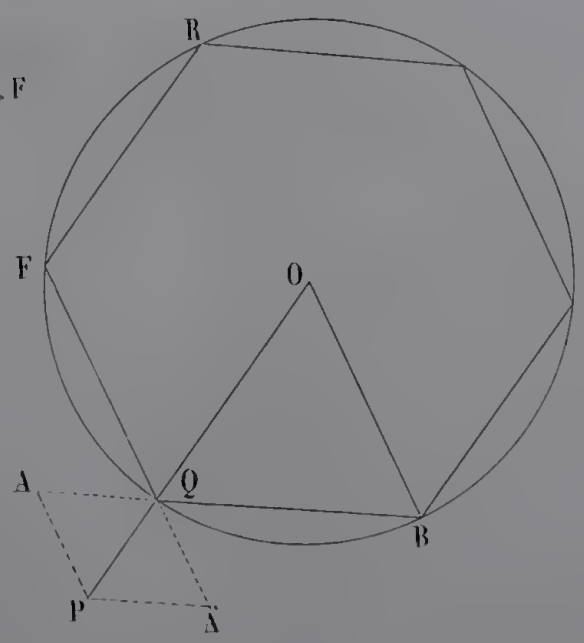


Fig. 3



DM. 400,–